MECCANICA RAZIONALE - 17.07.2018

COGNOME E NOME ....

C. D. L.: .... ANNO DI CORSO: 2 3 ALTRO

MATRICOLA .... FIRMA ....

ISTRUZIONI

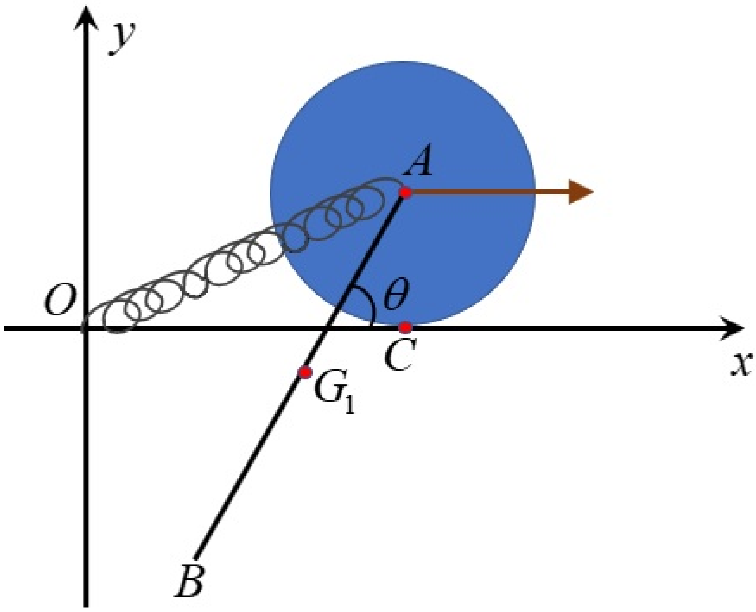
1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni; in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello) e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato **dopo** ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo**.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

Quesito	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOT
Punti										

In un piano verticale Oxy un sistema materiale pesante è costituito da un disco omogeneo di massa $4m$ e raggio R, che rotola senza strisciare sull'asse delle x, e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ, avente l'estremo A incernierato nel centro del disco. Oltre alla forza peso, sul sistema materiale agiscono

- Una forza elastica $\vec{F}_k = -k\,(A-O)$, dove A è il centro del disco.
- Una forza costante $\vec{F}_A = \eta\hat{i}_1$ applicata in A, dove $\eta = kR$ ed $\hat{i}_1$ è il versore dell'asse delle x.

Supposti i vincolo lisci, e dati i parametri lagrangiani θ, che è l'angolo tra x^+ ed $A-B$, e $\xi = (C-O)\cdot\hat{i}_1$, dove C è il punto di contatto del disco con l'asse delle x, si chiede:



1. Determinare le coordinate dei punti A, C, G_1 (G_1 è il baricentro dell'asta) e l'espressione delle forze attive in funzione dei parametri lagrangiani. [PUNTI 2]

$A - O = (\xi, R, 0)$; $C - O = (\xi, 0, 0)$; $G_1 - O = (\xi - \ell\cos(\theta), R - \ell\sin(\theta), 0)$; $\vec{F}_A = kR(1,0,0)$; $\vec{F}_k = -k(\xi, R, 0)$.

2. Determinare la funzione potenziale U di tutte le forze attive agenti sul sistema. [PUNTI 4]

$U = mg\ell\sin(\theta) + k\xi(R - \frac{1}{2}\xi) + cost.$

3. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema [PUNTI 4]

$(\xi_1, \theta_1) = \left(R, \frac{\pi}{2}\right)$; $(\xi_2, \theta_2) = \left(R, \frac{3\pi}{2}\right)$.

4. Determinare la reazione vincolare in C nelle configurazioni di equilibrio. [PUNTI 4]

$\vec{\phi}_C = (0, kR + 5mg, 0)$

5. Verificare che $\vec{w} = -\frac{\dot{\xi}}{R}\hat{\imath}_3$ è la velocità angolare del disco. [PUNTI 2]

C è centro istantaneo di rotazione per il disco $\to \vec{v}_A = \vec{w} \wedge (A - C) \to \vec{w} = -\frac{\dot{\xi}}{R}(0,0,1)$.

6. Scrivere l'energia cinetica del sistema. [PUNTI 4]

$T = \frac{1}{2}m\left(7\dot{\xi}^2 + \frac{4}{3}\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\xi}\dot{\theta}\sin(\theta)\right)$

7. Calcolare l'espressione della quantità di moto del sistema [PUNTI 4]

$\vec{Q} = m(5\dot{\xi} + \ell\dot{\theta}\sin(\theta), -\ell\dot{\theta}\cos(\theta), 0)$

8. Calcolare il momento della quantità di moto dell'asta rispetto al polo O [PUNTI 4]

$$\vec{K}_{O,AB} = \left(\frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta} - mR\dot{\xi} - m\ell\left(R\dot{\theta}\sin(\theta) - \dot{\xi}\sin(\theta) + \xi\dot{\theta}\cos(\theta)\right)\right)\hat{\imath}_3$$

9. Scrivere le equazioni differenziali del moto del sistema [PUNTI 4]

$$\frac{4}{3}\ell\ddot{\theta} + \ddot{\xi}\sin(\theta) - g\cos(\theta) = 0;$$
$$7m\ddot{\xi} + m\ell\ddot{\theta}\sin(\theta) + m\ell\dot{\theta}^2\cos(\theta) - k(R-\xi) = 0.$$