Esericizio 1

Un'asta rigida di lunghezza $2L$ é vincolata a giacere sul paino (x, y). Determina i gradi di libertá del sistema e le configurazioni dei punti dell'asta tramite opportune coordinate lagrangiane.

R Il sistema ha 3 gradi di libertá, due per un punto di riferimento sull'asta (ad esempio il suo centro) e l'altro per l'orientazione rispetto ad un sistema di coordinate fisso. Se scegliamo come coordinate lagrangiane le coordinate del centro dell'asta (x, y) e l'angolo θ formato dall'asta con l'asse $\hat{i}_1$ allora

$$P - O = (x + s\cos(\theta), y + s\sin(\theta)) \quad s \in (-L, L)$$

Esericizio 2

Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati $AB = CD = a$, $BC = AD = b$ é vincolata a giacere sul piano (x, y) e ad avere il lato AB sull'asse $y = \mathtt{tan}(\theta)$x, giacendo sul semipiano superiore rispetto all'asse. Determina i gradi di libertá del sistema e le configurazioni dei punti della lamina tramite opportune coordinate lagrangiane.

R Il sistema ha 1 grado di libertá (che determina ad esempio il centro del lato AB).

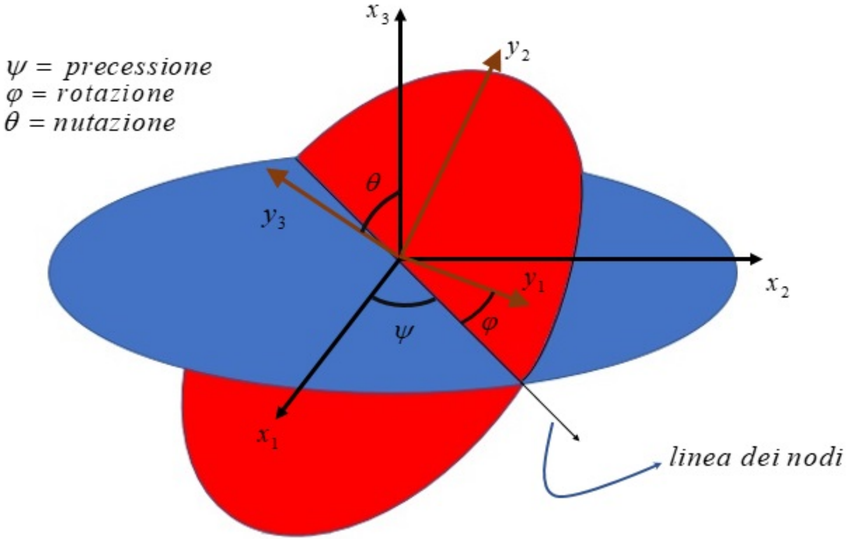
$P - O = ((y_1 + d)\cos(\theta) - y_2 \sin(\theta), (y_1 + d)\sin(\theta) + y_2 \cos(\theta))$
$d \in \mathbb{R}, y_1 \in (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}), y_2 \in (0, b)$.

Esericizio 3

Determinare esplicitamente, mediante gli angoli di Eulero (si veda la figura nella pagina successiva), l'espressione degli assi solidali ad un corpo rigido rispetto ad un sistema di riferimento fisso

R.Si ottengono da $\hat{j}_k = \sum_{n=1}^{3} R_{k,n}\hat{i}_n$, dove $R_{k,n}$ é la matrice data dal prodotto

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


ψ = precessione
φ = rotazione
θ = nutazione
x3
x2
x1
y1
y2
y3
θ
ψ
φ
linea dei nodi

Esericizio 4

Nel piano (x, y) un punto materiale P si muove, di moto uniforme, lungo una retta passante per l'origine ed uniformemente rotante intorno all'asse determinato da $\hat{i}_3$, con velocitá angolare $\vec{w} = w\hat{i}_3$. All'istante $t = 0$ il punto ha coordinate $(x_0, 0)$. Descrivere il moto del punto P.

R. Le coordinate di P sono $P - O = (vt + x_0)(\cos(wt)\hat{i}_1 + \sin(wt)\hat{i}_2)$, la velocitá é data da $\vec{v} = v(\cos(wt)\hat{i}_1 + \sin(wt)\hat{i}_2) + w(vt + x_0)(-\sin(wt)\hat{i}_1 + \cos(wt)\hat{i}_2)$, l'accelerazione é $\vec{a} =$
$2wv(-\sin(wt)\hat{i}_1 + \cos(wt)\hat{i}_2) - w^2(vt + x_0)(\cos(wt)\hat{i}_1 + \sin(wt)\hat{i}_2)$.
La traiettoria é una spirale di Archimede.

Esericizio 5

Una semicirconferenza di centro C e raggio R ha gli estremi del diametro orizzontale vincolati a scorrere con velocitá costante $\vec{u}$ lungo una guida (orizzontale anch'essa). A $t = 0$ l'estremo sinistro A coincide con l'origine O. Determinare

- le coordinate, la velocitá e l'accelerazione dei punti della circonferenza.
- le coordinate, la velocitá e l'accelerazione di un punto mobile sulla circonferenza.