Esericizio 1 Su un punto P agisce la forza posizionale

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 \hat{e}_1 + x_1 x_3 \hat{e}_2 + x_1 x_2 \hat{e}_3.$$

Determinare se la forza é conservativa e, nel caso affermativo, trovare il potenziale, l'energia potenziale e l'energia meccanica del punto P.

R. La forza è conservativa, $U = x_1 x_2 x_3$.
$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right) - x_1 x_2 x_2$.

Esericizio 2

Su un punto P agisce la forza posizionale

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \hat{e}_2.$$

Determinare se la forza è conservativa e, nel caso affermativo, trovare il potenziale, l'energia potenziale e l'energia meccanica del punto P.

R. La forza non è conservativa.

Esericizio 3

Dimostrare che tutte le forze centrali sono conservative e trovarne il potenziale. Determinare successivamente l'energia meccanica di un punto P in un campo di forze centrali.

Suggerimento: si ricordi che una forza centrale agente su un punto P è data dall'espressione $\vec{F} = \frac{\rho(r)}{r}(P - O)$, dove $r = |P - O|$ e ρ è una funzione che ammette una primitiva.
R. $U = \Phi(r)$ dove $\Phi(r) = \int^r \rho(x)dx$, $E = T - U$.

Esericizio 4

Su un punto P agisce una forza elastica dovuta ad una molla con lunghezza a riposo pari ad ℓ. Determinare:

- Il potenziale
- l'energia meccanica
- le equazioni differenziali del moto.
- la soluzione delle equazioni differenziali del moto.

R. $U = -k\frac{(x-\ell)^2}{2}$, $x(t) = \ell + (x(0) - \ell)\cos(\omega t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin(\omega t)$, dove $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Esericizio 5

Un punto P è vincolato a muoversi sull'asse x_3. Su di esso agisce la forza peso ed una forza $\vec{F}$ diretta come $\hat{e}_3$ e di modulo pari a $k\,(x_3)^{-2}$. Le condizioni iniziali sono date da $x(0) = \hat{e}_3$, $\vec{v}(0) = v_0\hat{e}_3$. Determinare

- le equazioni differenziali del moto.
- Il potenziale a cui è soggetto il punto.
- l'energia meccanica del punto.
- La quota massima e la quota minima raggiunta dal punto.

R. $U = -mgx_3 - \frac{k}{x_3}$, $x_3^{\max} = \frac{E+\sqrt{E^2-4mgk}}{2mg}$, $x_3^{\min} = \frac{E-\sqrt{E^2-4mgk}}{2mg}$

Esericizio 6

Calcolare la velocità minima con la quale si deve lanciare un oggetto affinchè esca dall'attrazione gravitazionale terrestre. Questa velocità dipende dalla massa dell'oggetto? Confronta successivamente il valore trovato con la velocità di entrata in atmosfera di un asteroide sulla Terra proveniente da molto lontano.

R. Entrambe le velocità sono pari a $\sqrt{\left(\frac{2KM}{R}\right)}$ dove R è il raggio terrestre, M la massa della Terra e K la costante di gravitazione universale.

Esericizio 7

Un punto P si muove su un piano liscio. Al punto è applicata la forza $\vec{F} = 3yx^2\hat{e}_1 + (x^3 + y)\hat{e}_2$. Verificare che la forza è conservativa, determinarne il potenziale e calcolare il lavoro effettuato dalla forza se il punto percorre l'arco di una circonferenza di raggio $R = 2$, partendo dal punto (2,0) ed arrivando in (0,2).

R. $U = x^3y + \frac{y^2}{2}$. $L = 2$.

Esericizio 8

Determinare il moto e la traiettoria di un proiettile nel vuoto soggetto alla forza peso ed ad una forza costante uguale a $-k\hat{e}_1$. Le condizioni iniziali sono $\vec{x}(0) = \vec{0}$ e $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$.

R. Il moto avviene nel piano $x_2 = 0$. Se α è l'angolo tra $\vec{v}(0)$ e $\hat{e}_1$ allora $x_1 = -\frac{k}{2m}t^2 + |v|\cos(\alpha)t$, $x_3 = -\frac{1}{2}gt^2 + |v|\sin(\alpha)t$. La traiettoria è una parabola.