Esempio 1

Fissato un qualsiasi evento B, la funzione $P(\cdot|B)$ è una funzione di probabilità. Verificare allora che per essa vale $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$.

Cosa si può dire invece dell'uguaglianza $P(A|\overline{B}) = 1 - P(A|B)$?

Esempio 2: paradosso di Bertrand

Ci sono tre scatole: una con due monete d'oro, una con una moneta d'oro ed una d'argento e l'ultima con due monete d'argento. Estraendo una moneta da una scatola a caso, si vede che essa è d'oro. Calcolare la probabilità che anche la seconda moneta della scatola sia d'oro. R. $2/3$

Esempio 3

Due ditte producono apparecchi radiofonici. Gli apparecchi della fabbrica A sono difettosi con probabilitá $\frac{1}{20}$, quelli della fabbrica B con probabilitá $\frac{1}{100}$. Ho acquistato 2 radio prodotte dalla <u>stessa</u> ditta, la A o la B, con probabilità del 50%. Se la prima delle due è difettosa, calcolare la probabilità condizionata che anche la seconda sia difettosa.

R. $P = \frac{13}{300}$

Esempio 4

Una società di assicurazione divide la popolazione in 2 categorie: $\{A\}$ = "inclini a provocare incidenti" e $\{B\}$ = "non inclini a provocare incidenti". Le probabilità che entro il primo anno si abbiano incidenti sono $P(A) = 0.4$ e $P(B) = 0.2$. Assumendo che q sia la frazione di popolazione totale incline agli incidenti (quindi $0 \leq q \leq 1$), determinare la probabilità che un nuovo assicurato abbia un incidente a un anno dal contratto.

R. $P = \frac{1+q}{5}$

Esempio 5

Il mio vicino innaffierà la mia pianta durante la mia assenza. Si sa che senz'acqua la pianta ha una probabilità p_1 di morire, con acqua ha invece una probabilità p_2 (con $p_2 < p_1$). Il vicino si ricorderà di innaffiare con probabilità q. Trovare:

- La probabilità che la pianta sia ancora in vita al mio ritorno.
- Nel caso in cui la pianta sia morta, la probabilità che il vicino si è dimenticato di innaffiare.
- I due punti precedenti nei casi specifici $p_1 = 0.8, p_2 = 0.15, q = 0.9$

R. 1)$P = 1 - p_1 + q(p_1 - p_2)$. 2)$P = \frac{p_1(1-q)}{p_2 q + p_1(1-q)}$.
3)$0.785, 0.372$.

Esempio 6

Una certa analisi è efficace con probabilità p (tipicamente $p > 95\%$) nel diagnosticare una certa malattia. Quindi, se il paziente è malato, con probabilità p l'analisi è positiva. Si possono poi verificare falsi positivi con probabilità r, cioè una persona sana che si sottopone al test risulta erroneamente positiva. Se l'incidenza della malattia nella popolazione è pari a q, calcolare

- La probabilità che un soggetto sia malato se l'esito del test è positivo.
- Il punto precedente nel caso $q = 1/1000$, $p = 99\%$ e $r = 1\%$.

Esempio 7

Una macchina della verità identifica correttamente il 90% dei sospettati come colpevoli, mentre il 10% viene valutato erroneamente come innocenti. Inoltre, i sospettati innocenti vengono valutati colpevoli l' 1% delle volte. Se il sospettato venisse scelto da un gruppo di persone dove il 95% non ha mai commesso un crimine, quale sarebbe la probabilità che sia innocente?

R. $19/109 \sim 17.4\%$