2 PRINCIPI ED EQUAZIONI FONDAMENTALI

2.1 Leggi di Newton

- PRIMA LEGGE: esiste un osservatore, detto inerziale o galileiano rispetto al quale un punto materiale isolato P permane nel suo *stato di quiete o di moto rettilineo e uniforme.*

- SECONDA LEGGE: il moto di un punto materiale P, rispetto ad un *osservatore inerziale*, è tale che il prodotto della massa m del punto P per la sua accelerazione $\mathbf{a}$ sia uguale alla forza risultante $\mathbf{F}$ di tutte le azioni che agiscono sul punto: $m\mathbf{a}=\mathbf{F}$.

- TERZA LEGGE: In un sistema materiale di punti $P_1, ..., P_n$, sia $(P_s, \mathbf{F}_{sr})$ la forza su P_s dovuta al punto P_r e $(P_r, \mathbf{F}_{rs})$ la forza su P_r dovuta al punto P_s. Allora tali forze costituiscono una coppia a braccio nullo, cioè i vettori $\mathbf{F}_{sr}$ e $\mathbf{F}_{rs}$ sono diretti secondo la congiungente P_s con P_r e $\mathbf{F}_{sr} = -\mathbf{F}_{rs}$.

ESEMPI DI FORZE

FORZE POSIZIONALI

Chiamiamo forze posizionali quelle forze che dipendono *solo* dalla posizione del punto P, cioè:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)).$$

Esempi di forze posizionali

- Forza elastica: il vettore applicato $(P, \mathbf{F})$, dove

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -k\mathbf{x} = -k(P - O), \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{R}^+$$

- Forza di attrazione newtoniana esercitata tra il punto materiale P, di massa m, e il punto materiale Q, di massa M: il punto Q esercita su P la forza

$$\mathbf{F} = -K\frac{Mm}{|P - Q|^2}\text{vers}(P - Q), \quad \text{con} \quad K \in \mathbb{R}^+$$

- Forza centrifuga:

$$\mathbf{F}_\tau = -m\mathbf{a}_\tau = m\omega^2(P - P^*),$$

dove P^* è la proiezione di P sull'asse di rotazione.

Forze dipendenti dalla velocità

- Forze di resistenza che i fluidi esercitano sui corpi in moto

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{x}, \mathbf{v})\mathbf{x}.$$

- Forza di tipo viscoso:

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -\lambda m \mathbf{v}, \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

- Forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}\right),$$

- Forza di Coriolis:

$$\mathbf{F}_c = -2m\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_r$$

Forza peso

- Sia (O', x', y', z') un *osservatore terrestre*, con O' un punto della superficie, z' normale alla superficie ed asse y' tangente al parallelo per O'.
- Sia (O, x, y, z) un osservatore inerziale, con O il centro della terra ed assi orientati secondo le stelle fisse.

- Sia P un punto materiale libero di massa m.
- Supponiamo che P sia soggetto solo alla forza di gravità terrestre:

$$\mathbf{F} = -K\frac{mM}{R^2}\text{vers}(P-O) = m\mathbf{G}$$

dove R e M sono il raggio e la massa della Terra e $\mathbf{G}$ è un vettore $\sim$ costante per moti in prossimità della superficie terrestre.
- Nel sistema (O', x', y', z') su P agisce la forza

$$\mathbf{F} = m\mathbf{G} - m\mathbf{a}_\tau - m\mathbf{a}_c$$

- Se $\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a}_c = \mathbf{0}$.
- Approssimativamente $\mathbf{a}_\tau = -w^2(P-P^*)$, dove w è il modulo della velocità angolare della Terra attorno al proprio asse di rotazione e P^* è la proiezione di P su tale asse. Quindi, rispetto a (O', x', y', z'), su P agisce la forza

$$\mathbf{F} = m\mathbf{G} + mw^2(P-P^*).$$

Definiamo forza peso $\mathbf{p}$ la somma

$$\mathbf{p} = m\mathbf{G} + mw^2(P-P^*) = m\mathbf{g}$$

dove $\mathbf{g} = \mathbf{G} + w^2(P-P^*)$ è l'accelerazione di gravità.

Osservazione: la direzione di **p**, detta verticale, **non coincide** con la direzione del raggio terrestre corrispondente, salvo nel caso in cui P sia ai poli o all'equatore.

Teorema delle forze vive per un sistema materiale libero

- Consideriamo un sistema materiale di N punti P_i ognuno con massa m_i. Dalla seconda legge della dinamica si ha:

$$m_s \dot{\mathbf{v}}_s(t) = \mathbf{F}_s(x(t), v(t), t), \quad s = 1, ..., N$$

dove con $x(t)$ e $v(t)$ abbiamo indicato l'insieme delle coordinate $\mathbf{x}_i$ e delle velocità $\mathbf{v}_i$. Moltiplicando scalarmente per $dP_s = \mathbf{v}_s dt$ si ha:

$$m_s \dot{\mathbf{v}}_s(t) \cdot \mathbf{v}_s dt = \mathbf{F}_s(x(t), v(t), t) \cdot \mathbf{v}_s dt$$

e sommando su s

$$\sum_{s=1}^{N} m_s \dot{\mathbf{v}}_s(t) \cdot \mathbf{v}_s dt = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{F}_s(x(t), v(t), t) \cdot \mathbf{v}_s dt \quad (1)$$

Adesso diamo alcune definizioni di quantità cinematiche utili:

Energia cinetica

L'**energia cinetica** T del sistema materiale è lo scalare

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s v_s^2$$

Lavoro elementare

Il **lavoro elementare** dL di un sistema di N forze $(\mathbf{F}_i, P_i)$ relativo all'intervallo di tempo dt è lo scalare

$$dL = \left(\sum_{s=1}^{N} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{v}_s \right) dt = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{F}_s \cdot dP_s \qquad (2)$$

Potenza

La **potenza** $\mathcal{P}$ di un sistema di N forze $(\mathbf{F}_i, P_i)$è lo scalare

$$\mathcal{P} = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{v}_s$$

Date le precedenti definizioni e l'equazione (1), vale il seguente teorema:

Teorema (delle forze vive)

Per il moto di un sistema materiale libero risulta

$$dL = dT$$

o, analogamente

$$\frac{dT}{dt} = \mathcal{P}$$

Osservazione 1): La variazione dT di energia cinetica è data da $dT = \sum_{s=1}^{N} m_s \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{v}_s$: l'equazione (2) è un'uguaglianza tra differenziali dP_i e differenziali $d\mathbf{v}_i$: essa sussiste solo per i moti effettivi del sistema, quando $dP_i = \mathbf{v}_i dt$.
Osservazione 2) Il lavoro del sistema di forze $(\mathbf{F}_i, P_i)$ in un intervallo finito di tempo si ottiene integrando l'espressione (2) nell'intervallo considerato. Il risultato dipende in genere sia dalle traiettorie effettive che dalle velocità (leggi orarie) con le quali esse vengono percorse.

Esercizio: calcolare il lavoro della forza $\mathbf{F} = -h\mathbf{v}$, dove $\mathbf{v} = v_0\hat{\mathbf{a}}$, con v_0 e $\hat{\mathbf{a}}$ costanti, lungo una traiettoria che parte in $\mathbf{x}_i$ e finisce in $\mathbf{x}_f$.

Un sistema di forze $\mathbf{F}_s(x, v)$ è detto posizionale se dipende solo dalle posizioni dei punti P_i, cioè $\mathbf{F}_s(x, v) = \mathbf{F}_s(x)$.

Se su un sistema materiale agiscono solo forze posizionali, allora il lavoro delle forze non dipende dalle leggi orarie, ma solo dalle traiettorie dei punti del sistema.

Forze conservative

Un sistema di forze posizionali $\mathbf{F}_s(x)$ è detto conservativo se esiste una funzione $\mathcal{U}$ delle coordinate x tale che

$$d\mathcal{U} = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{F}_s(x) \cdot d\mathbf{x}_s = \sum_{s=1}^{N} (F_{s1}(x) dx_{s1} + F_{s2}(x) dx_{s2} + F_{s3}(x) dx_{s3})$$

o, equivalentemente

$$F_{s1}(x) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_{s1}}, \quad F_{s2}(x) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_{s2}}, \quad F_{s3}(x) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_{s3}}$$

Un'altra definizione di forze conservative la si ottiene considerando il lavoro delle forze su traiettorie chiuse; infatti vale il seguente importante teorema:

Il sistema di forze posizionali $\mathbf{F}_s(x)$ (continue nel loro dominio $\Omega^N = \mathbb{R}^{3N}$) è conservativo se e solo se, per qualunque curva chiusa $\gamma \in \Omega^N$ si ha

$$\int_\gamma \sum_{s=1}^{N} \mathbf{F}_s(x) \cdot d\mathbf{x}_s = 0.$$

Dal precedente teorema segue che

se su un sistema materiale agiscono solo forze conservative, allora il lavoro delle forze non dipende né dalle leggi orarie né dalle traiettorie effettivamente percorse, ma solo dalle configurazioni iniziali e finali del sistema (gli estremi delle traiettorie).

- È vero anche il viceversa della precedente affermazione.
- La funzione potenziale $\mathcal{U}$ è definita a meno di una costante additiva arbitraria.
- Data una funzione scalare $f(x_1, x_2, x_3)$, il suo vettore gradiente ∇f è definito da $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \doteq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$

$\Rightarrow$ La relazione tra forze e funzione potenziale è $\mathbf{F}_s = \nabla_{\mathbf{x}_s} \mathcal{U} \doteq \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{x}_s}$.

Conservazione dell'energia meccanica

Teorema (conservazione dell'energia meccanica)

Se su un sistema materiale agiscono solo forze conservative con potenziale $\mathcal{U}$, la quantità

$$T - U = E$$

è costante nel tempo. La costante E è chiamata energia meccanica del sistema.

Dimostrazione: dal teorema delle forze vive e considerando che le forze sono conservative, si ha:

$$\frac{dT}{dt} = \mathcal{P} = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_s} \cdot \frac{d\mathbf{x}_s}{dt} = \frac{d\mathcal{U}}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(T - \mathcal{U}) = 0$$

Nota bene: l'energia potenziale $\mathcal{V}$ è definita con un segno di differenza rispetto alla funzione potenziale $\mathcal{U}$, cioè $\mathcal{V} = -\mathcal{U}$.

- Se il lavoro elementare di una forza è sempre non positivo, la forze è chiamata resistente. Un esempio è la forza di attrito viscoso $\mathbf{F} = -h\mathbf{v}$.
- Se su un sistema materiale agiscono sia forze conservative con potenziale $\mathcal{U}$ che forze di tipo resistente,

allora

$$\frac{d(T-\mathcal{U})}{dt} \leq 0 \Rightarrow T(t)-\mathcal{U}(t) \leq T(t_0)-\mathcal{U}(t_0) \;\; \forall t \geq t_0$$

Quantità di moto e momento della quantità di moto per un punto materiale - Sia (P, m) un punto materiale libero, su cui agisce una risultante $\mathbf{F}$ delle forze
- L'equazione fondamentale della dinamica è data da

$$m\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t)$$

- Definiamo la quantita di moto $\mathbf{Q}$ di un punto materiale (P, m) il vettore

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}$$

- Dalle due espressioni precedenti si ha

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t)$$

- Definiamo momento della quantità di moto $\mathbf{K}_O$ di un punto materiale (P, m) rispetto ad un polo O il vettore

$$\mathbf{K}_O = (P-O) \wedge \mathbf{Q} = (P-O) \wedge m\mathbf{v}$$

Teorema (momento della quantità di moto)

La derivata temporale del momento della quantità di moto di un punto materiale libero rispetto ad un polo fisso O è data dal momento risultante $\mathbf{\Omega}_O$, rispetto allo stesso polo, di tutte le forze agenti su P, i.e.:

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{\Omega}_O(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

- Proiettando su un asse fisso il cui versore è $\hat{\mathbf{u}}$, si ottiene il momento assiale della quantità di moto $K_u = \mathbf{K}_O \cdot \hat{\mathbf{u}}$ e quindi il teorema del momento assiale della quantità di moto: la derivata temporale del momento assiale della quantità di moto K_u di un punto materiale libero rispetto ad un asse di versore $\hat{\mathbf{u}}$, è data dal momento assiale risultante $\Omega_u = \mathbf{\Omega}_O \cdot \hat{\mathbf{u}}$, rispetto allo stesso asse, di tutte le forze agenti su P, i.e.:

$$\frac{dK_u}{dt} = \Omega_u(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

Equazioni differenziali del moto di un punto materiale libero

Consideriamo un punto materiale libero in moto rispetto ad un sistema inerziale (O, x, y, z) e sollecitato da un insieme di forze la cui risultante è $\mathbf{F}$. Dall'equazione fondamentale della dinamica si ha

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (3)$$

- Il precedente è un sistema di tre equazioni differenziali per le coordinate $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ del punto. Sotto opportune condizioni sulla funzione $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ (sempre verificate in natura), la soluzione è unica e dipende da sei costanti arbitrarie, che caratterizzano le posizioni e le velocità iniziali del punto.
- L'equazione differenziale quindi descrive l'insieme dei moti causati dalla forza $\mathbf{F}$ quando applicata al punto P.
- La totalità delle soluzioni (dipendente da sei costanti arbitrarie) è chiamata *integrale generale* dell'equazione differenziale.
- Una soluzione ottenuta da una particolare scelta delle condizioni iniziali è detta *integrale particolare*.

Si chiama integrale primo del moto per il sistema (3) una equazione differenziale del primo ordine

$$\phi\left(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t\right) = \text{cost.} \quad (4)$$

che risulta una conseguenza diretta di (3), nel senso che ogni soluzione di (3) lo è anche di (4)

- Dato un sistema di forze agenti sul punto P con risultante $\mathbf{F}$, non è detto che esista un integrale primo del moto.
- Quando esiste, un integrale primo non deve dipendere necessariamente da tutte le variabili $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ ed il tempo, ma potrebbe ad esempio anche essere una relazione algebrica tra le coordinate $\mathbf{x}$.
- Esempi di integrali primi del moto li abbiamo già incontrati: l'energia meccanica per un sistema di forze conservative e la velocità areale in un moto centrale.

Statica del punto materiale libero

Una configurazione $\mathbf{x}_e$ è detta di equilibrio se, posto il sistema materiale in $\mathbf{x}_e$ con velocità iniziale nulla. allora il corrispondente moto è la quiete, i.e. P rimane fermo in $\mathbf{x}_e$.

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una posizione $\mathbf{x}_e$ sia di quilibrio è che

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_e, 0, t) = \mathbf{0}. \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

Punto materiale vincolato

Un punto materiale P è detto vincolato se il suo moto è limitato da vincoli (olonomi o anolonomi).

- Il vincolo agisce come un'azione in grado di alterare il moto $\Rightarrow$ tale azione può essere interpretata come una forza che nasce dal contatto tra il vincolo e P.
- Tale forze è detta reazione vincolare ed è quindi un *vettore applicato* nel punto P.
- A differenza delle *forze attive*, le reazioni vincolari non sono esprimibili tramite funzioni delle configurazioni del sistema, ma sono quantità incognite $\Rightarrow$ nasce il problema di come studiare il moto vincolato di P.
- *Supponiamo* che sia sempre possibile **sostituire** i vincoli mediante opportune reazioni vincolari **senza alterare** lo stato di quiete o di moto del punto.

Le reazioni vincolari vanno aggiunte alle forze che agiscono sul punto:

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \boldsymbol{\phi}$$

Nel caso di un sistema materiale costituito da N punti analogamente si avrà:

$$m_s\ddot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \boldsymbol{\phi}_s, \quad s = 1, ..., N$$

Come ottenere informazioni sulle reazioni vincolari $\boldsymbol{\phi}_s$? Per rispondere dobbiamo introdurre il lavoro virtuale, le velocità virtuali e gli spostamenti virtuali.

- Si definisce velocità virtuale $\mathbf{v}'_s$ nell'istante t di un punto P_s ogni velocità *compatibile* con i vincoli **supposti fissi** nell'istante considerato.
- Si definisce lavoro virtuale δL relativo all'istante t ed al sistema di forze $\mathbf{F}_s(t)$ la quantità

$$\delta L = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{v}'_s dt$$

- Si definisce spostamento virtuale $\delta\mathbf{x}_s$ del punto P la quantità

$$\delta\mathbf{x}_s = \mathbf{v}'_s dt$$

- Il lavoro virtuale è anche dato da

$$\delta L = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{F}_s \cdot \delta\mathbf{x}_s$$

- In generale, gli spostamenti e le velocità virtuali non coincidono con gli spostamenti e le velocità reali o possibili.
- Esempio: un punto vincolato ad una guida circolare il cui raggio varia nel tempo: lo spostamento reale ha una componente lungo il raggio dovuta alla variazione della circonferenza. Lo spostamento virtuale non ha componente radiale poichè è eseguito con i vincoli supposti fissi nell'istante considerato.
- Un'altra definizione che ci sarà utile nel seguito è quella di spostamento virtuale invertibile

Uno spostamento virtuale $\delta\mathbf{x}_s$ è detto invertibile se anche $-\delta\mathbf{x}_s$ è *uno spostamento virtuale*, altrimenti lo spostamento è detto non invertibile.

- Esempio: sono invertibili gli spostamenti che possono compiere un punto materiale libero, o un corpo rigido con punto fisso. Non sono invertibili gli spostamenti di un corpo rigido *poggiato* su un piano xy che hanno una componente positiva verso z (cioè gli spostamenti che producono un distacco).

Principio delle reazioni vincolari

① È sempre possibile **sostituire** i vincoli di un sistema materiale con opportune reazioni vincolari senza alterarne lo stato di moto o quiete.
② Il lavoro virtuale del corrispondente sistema di reazioni vincolari è sempre **non negativo**, in particolare **nullo per spostamenti invertibili**. Pertanto, dato il sistema di reazioni vincolari $\boldsymbol{\phi}_s$, si ha

$$\delta L^{(v)} = \sum_{s=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_s \cdot \delta \mathbf{x}_s \geq 0$$

Applicazioni:
- studio del moto e dell'equilibrio dei sistemi
- informazioni sulle direzioni delle reazioni vincolari $\boldsymbol{\phi}_s$

Punto materiale P poggiato su un piano orizzontale

- Gli spostamenti invertibili sono tutti quelli tangenti al piano.
- La direzione della reazione vincolare $\boldsymbol{\phi}$ è allora $\perp$ al piano.
- Gli spostamenti non invertibili sono quelli di distacco dal piano.
- l'angolo tra $\boldsymbol{\phi}$ e lo spostamento di distacco deve essere acuto: questo determina il verso di $\boldsymbol{\phi}$

Punto materiale P vincolato su una curva

- La reazione vincolare $\boldsymbol{\phi}$ ha la direzione di una delle normali alla curva (a priori non si può individuare quale sia).
- L'equazione della dinamica nella direzione tangente alla curva (lungo $\mathbf{T}$) determina la legge oraria (i.e. $s(t)$, dove s è l'ascissa curvilinea)
- Le equazioni lungo le direzioni $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ determinano la reazione vincolare.

Esercizio: un punto materiale di massa m è vincolato a un binario circolare di raggio R ed è soggetto alla forza peso $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{i}}_3$. Determinare il moto del punto e la reazione vincolare.