3 Geometria delle masse e grandezze cinetiche

Geometria delle masse

- Consideriamo un sistema materiale costituito da un insieme di punti materiali $(P_1, m_1), (P_2, m_2), \ldots$.
- Il sistema materiale è detto discreto se è costituito da un numero **finito** o **numerabile** di punti materiali.
- Il sistema materiale è detto continuo se è costituito da un insieme **non numerabile** di punti materiali.

Baricentro di un sistema discreto e finito

Definiamo baricentro di un sistema materiale discreto e finito il punto G individuato da

$$G - O = \frac{\sum_{s=1}^{N} m_s \boldsymbol{x}_s}{\sum_{s=1}^{N} m_s} = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{N} m_s \boldsymbol{x}_s$$

dove O è un punto fissato di riferimento, $\boldsymbol{x}_s = P_s - O$ e m è la massa totale del sistema.

- Il baricentro di un sistema materiale discreto e finito coincide con il centro di un sistema di vettori paralleli e concordi di lunghezza proporzionale alle masse dei punti. Infatti

$$C - O = \frac{\sum_{s=1}^{N} m_s |\boldsymbol{g}| \boldsymbol{x}_s}{\sum_{s=1}^{N} m_s |\boldsymbol{g}|} = \frac{\sum_{s=1}^{N} m_s \boldsymbol{x}_s}{\sum_{s=1}^{N} m_s}$$

Pertanto il sistema delle forze peso è equivalente ad un'unica forza peso applicata nel baricentro G del sistema e pari a $\boldsymbol{R} = \sum_{s=1}^{N} m_s \boldsymbol{g} = m\boldsymbol{g}$

Baricentro di un sistema discreto e numerabile

Definiamo baricentro di un sistema materiale discreto e numerabile il punto G individuato da

$$G - O = \frac{\sum_{s=1}^{+\infty} m_s \boldsymbol{x}_s}{\sum_{s=1}^{+\infty} m_s} = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{+\infty} m_s \boldsymbol{x}_s$$

dove O è un punto fissato di riferimento, $\boldsymbol{x}_s = P_s - O$ e m è la massa totale del sistema.

- Consideriamo un sistema materiale continuo $\mathcal{B}$.
- La densità di massa ρ del sistema materiale è una funzione regolare non negativa tale che se $\mathcal{C}$ è un sottoinsieme del sistema materiale, allora

$$m(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \rho(\boldsymbol{x}) dV$$

è la massa di $\mathcal{C}$.

Baricentro di un sistema continuo

Definiamo baricentro di un sistema materiale continuo il punto G individuato da

$$G - O = \frac{\int_{\mathcal{B}} \rho(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{x} dV}{\int_{\mathcal{B}} \rho(\boldsymbol{x}) dV} = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{B}} \rho(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{x} dV$$

dove O è un punto fissato di riferimento, $\boldsymbol{x} = P - O$ e m è la massa totale del sistema.

Nel caso di un corpo continuo omogeneo la densità $\rho(\boldsymbol{x})$ è costante. Quindi

$$G - O = \frac{\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{x} dV}{\int_{\mathcal{B}} dV} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{x} dV$$

Proprietà del baricentro

Nel seguito considereremo un sistema materiale discreto e finito, ma le proprietà possono essere estese anche ai sistemi materiali discreti e numerabili o continui con dimostrazioni analoghe.

- Il baricentro G è indipendente dalla scelta di O. Infatti consideriamo

$$G' - O' = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{N} m_s (P_s - O')$$

Allora

$$(G - O) - (G' - O') =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{N} m_s [(P_s - O) - (P_s - O')] = (O' - O)$$

da cui $G' - G = \mathbf{0}$

Teorema: se la massa di un sistema materiale è distribuita lungo una retta o una superficie piana, il baricentro appartiene a quella retta o a quella superficie piana

Piano di simmetria materiale

Un piano di simmetria materiale per un dato sistema è un piano di simmetria per il sistema geometrico corrispondente, tale che i punti simmetrici rispetto al piano hanno uguale masse

Teorema: Se un sistema materiale ha un piano di simmetria materiale π, allora il baricentro G appartiene a π.

Corollario 1): Se un sistema materiale ha **due** piani di simmetria materiale π_1 e π_2, allora il baricentro G appartiene alla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.
Corollario 2): Se un sistema materiale ha un asse di simmetria a, allora il baricentro $G \in a$.

Proprietà distributiva del baricentro

Comunque si scomponga un sistema materiale di baricentro G in due sistemi, rispettivamente di massa m_1 e m_2 con baricentri G_1 e G_2, si ha

$$G - O = \frac{m_1(G_1 - O) + m_2(G_2 - O)}{m_1 + m_2}$$

Corollario: Se un sistema materiale è piano e delimitato da una curva chiusa convessa, allora il baricentro è interno a tale curva.

Quantità di moto e momento della quantità di moto

Per fissare le idee, consideriamo un sistema discreto e finito $\mathcal{B}$ $(P_1, m_1)\ldots(P_N, m_N)$ in moto rispetto rispetto ad un osservatore (O, x, y, z). Le seguenti definizioni e proprietà possono essere estese ad un sistema materiale discreto e numerabile o continuo.

Quantità di moto

Definiamo quantità di moto del sistema materiale $\mathcal{B}$ il **vettore**

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{s=1}^{N} m_s \boldsymbol{v}_s$$

Si ha:

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_s \frac{d}{dt}(P_s - O) = m\boldsymbol{v}_G$$

dove $m = \sum_s m_s$ è la massa totale del sistema $\mathcal{B}$ e $\boldsymbol{v}_G$ è la velocità del baricentro G del sistema materiale $\mathcal{B}$

Proposizione: la quantità di moto di un sistema materiale rispetto ad un riferimento con origine nel suo baricentro G è sempre **nulla**.

Momento della quantità di moto

Definiamo momento della quantità di moto $\boldsymbol{K}_O$ del sistema materiale $\mathcal{B}$, **calcolato rispetto al polo O**, il vettore

$$\boldsymbol{K}_O = \sum_{s=1}^{N} (P_s - O) \wedge m_s \boldsymbol{v}_s$$

Introduciamo l'osservatore fisso (O, x, y, z) e l'osservatore (G, x', y', z') con origine nel baricentro G del sistema materiale $\mathcal{B}$ ed **assi paralleli o comunque invariabili** rispetto agli assi del riferimento fisso. Allora vale il seguente

Teorema:

$$\boldsymbol{K}_O = (G - O) \wedge m\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{K}'_G$$

dove $\boldsymbol{K}'_G$ è il momento della quantità di moto del sistema materiale $\mathcal{B}$ rispetto al polo G e riferito all'osservatore (G, x', y', z').
Come corollario vale il seguente: se $O \doteq G$, allora $\boldsymbol{K}_G = \boldsymbol{K}'_G$.

Energia cinetica e momenti d'inerzia

Quantità di moto

Definiamo energia cinetica del sistema materiale $\mathcal{B}$ lo **scalare**

$$T = \sum_{s=1}^{N} m_s v_s^2$$

Nota bene: per un sistema continuo, l'energia cinetica è data dallo scalare

$$T = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} \rho v^2 dV$$

Enrgia cinetica di un CR con punto fisso O

Poichè in un CR con punto fisso l'atto di moto è rotatorio, si ha $\boldsymbol{v}_s = \omega \wedge (P_s - O)$, dove $\boldsymbol{w}$ è la velocità istantanea di rotazione. Quindi

$$T = \frac{1}{2}\sum m_s v_s^2 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s r_s^2 w^2 \doteq \frac{1}{2} I w^2$$

dove r è la distanza tra la proiezione di P_s sull'asse di istantanea rotazione e P_s stesso ed abbiamo definito

$$I = \sum_{s=1}^{N} m_s r_s^2$$

momento d'inerzia del CR rispetto all'asse di istantanea rotazione.

Nota bene: per un CR continuo I è dato da

$$I = \int_{\mathcal{B}} \rho r^2 dV$$

Teorema di König (per l'energia cinetica)

L'energia cinetica di un sistema materiale, non necessariamente rigido, è data da

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + T'$$

dove m è la massa del sistema materiale e T' è l'energia cinetica del sistema calcolata rispetto ad un sistema di riferimento (G, x', y', z') con origine nel baricentro G del sistema e **assi invariabili** rispetto al riferimento fisso (O, x, y, z)

Proposizione: se il sistema è rigido, allora $T' = \frac{1}{2} I w^2$, dove I è il momento d'inerzia del sistema materiale rigido rispetto all'asse baricentrico parallelo all'asse di istantanea rotazione.

Osservazione: nel caso di un CR con un punto fisso, il momento d'inerzia I non risulta in generale costante, in quanto, durante il moto, l'asse di istantanea rotazione varia

Matrice d'inerzia

Consideriamo un CR con punto fisso O. Siano (O, x, y, z) un sistema fisso e (O', x', y', z') un riferimento solidale. Poichè l'atto di moto è di rotazione con $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{x}'_s$, si ha

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \left(w^2 x_s'^2 - (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}'_s)^2 \right)$$

dove $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ e $\boldsymbol{x}'_s = (x'_s, y'_s, z'_s)$ sono i vettori velocità angolare e posizione nel sistema solidale. Quindi

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{3} w_h w_k \sum_{s=1}^{N} m_s \left(\delta_{h,k} x_s'^2 - x'_{hs} x'_{ks} \right)$$

Definiamo la matrice d'inerzia $\mathbb{I}_O$ di componenti

$$I_{hk} = \sum_{s=1}^{N} m_s \left(\delta_{h,k} x_s'^2 - x'_{hs} x'_{ks} \right)$$

La matrice è simmetrica (cioè $I_{h,k} = I_{k,h}$ e le sue componenti hanno le dimensione di massa per distanza al quadrato.

La matrice $\mathbb{I}_O$ è esplicitamente data da

$$\mathbb{I}_O = \sum_{s=1}^{n} m_s \begin{pmatrix} y_s'^2 + z_s'^2 & -x_s' y_s' & -x_s' z_s' \\ -x_s' y_s' & x_s'^2 + z_s'^2 & -y_s' z_s' \\ -x_s' z_s' & -y_s' z_s' & x_s'^2 + y_s'^2 \end{pmatrix}$$

Gli elementi della diagonale principale I_{11}, I_{12} e I_{13} sono detti momenti d'inerzia del corpo rigido rispetto agli assi x', y' e z'.
$-I_{12}$, $-I_{13}$ e $-I_{23}$ sono detti prodotti d'inerzia o momenti di deviazione
L'energia cinetica è allora data da

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{3} I_{hk} w_h w_k = \frac{1}{2} (\mathbb{I}_O \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{w}$$

Mediante la matrice d'inerzia è possibile calcolare il momento d'inerzia rispetto ad un qualsiasi asse passante per il punto fisso O.
Infatti, siano $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i coseni direttori rispetto al riferimento (O, x', y', z') di un asse diretto come il vettore $\boldsymbol{w}$. Questi sono dati da

$$\alpha_1 = \frac{w_1}{w}, \quad \alpha_2 = \frac{w_2}{w}, \quad \alpha_3 = \frac{w_3}{w}.$$

Dalle espressioni precedenti per l'energia cinetica abbiamo

$$T = \frac{1}{2} I_\alpha w^2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{3} I_{hk} w_h w_k$$

dove I_α è il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse passante per O e diretto come il vettore $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.
Quindi

$$I_\alpha = \sum_{h,k=1}^{3} I_{hk} \alpha_h \alpha_k = (\mathbb{I}_O \alpha) \cdot \alpha$$

Energia cinetica di un corpo rigido

L'energia cinetica di un corpo rigido è data da

$$T = \frac{1}{2} m v_O^2 + m \boldsymbol{v}_O \cdot (\boldsymbol{w} \wedge (G - O)) + \frac{1}{2} (\mathbb{I}_O \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{w}$$

dove m è la massa del corpo, O è l'origine di un sistema di riferimento soldale al corpo e G il baricentro.

- Se $G = O$ allora

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} (\mathbb{I}_G \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{w}$$

- Se invece $\boldsymbol{v}_O = \mathbf{0}$ allora

$$T = \frac{1}{2}(\mathbb{I}_O \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{w}$$

Assi principali d'inerzia

Tra le infinite possibili scelte di terne solidali con il corpo rigido, è possibile trovare una per cui la matrice d'inerzia è diagonale. È necessario ricordare alcune nozioni di algebra e geometria.

Autovalori e autovettori

Un autovettore della matrice $\mathbb{I}$ è un vettore $\boldsymbol{a}$ per cui esiste un numero λ, detto autovalore, tale che

$$\mathbb{I}\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a}$$

Ricordiamo che gli autovalori corrispondenti alla matrice $\mathbb{I}$ si ottengono dalla soluzione dell'equazione

$$\det[\mathbb{I} - \lambda \mathbb{1}]$$

dove $\mathbb{1}$ è la matrice identità. Nel caso di matrici 3x3, l'equazione precedente è una equazione di terzo grado.

Una volta trovati gli autovalori, è possibile associare ad ognuno di essi un autovettore tramite la soluzione dell'equazione

$$\mathbb{I}\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a}.$$

Per una matrice 3x3 avremo quindi tre autovalori λ_1, λ_2 e λ_3 e tre autovettori $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ e $\boldsymbol{a}_3$.
La matrice d'inerzia è simmetrica. Da questa osservazione discendono due conseguenze:

- Gli autovalori λ_1, λ_2 e λ_3 sono reali.
- Gli autovettori $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ e $\boldsymbol{a}_3$ sono ortogonali (e quindi ortonormali).

Pensando di normalizzare gli autovettori scegliendoli di modulo pari a 1 (se non lo sono basta scegliere $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$) come autovettore invece di $\boldsymbol{a}$), possiamo stabilire il seguente

Teorema

È possibile scegliere una terna solidale $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ con il corpo rigido ortonormale e rispetto a questa terna la matrice d'inerzia $\mathbb{I}$ è diagonale.

Si noti che i momenti principali d'inerzia coincidono con l'autovalore corrispondente all'autovettore diretto come l'asse d'inerzia considerato. Infatti, se λ è un autovalore di $\mathbb{I}$, allora esiste un vettore $\boldsymbol{a}$ tale che

$$\mathbb{I}\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}.$$

e quindi

$$\lambda = \frac{(\mathbb{I}\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2} = (\mathbb{I}\alpha) \cdot \alpha = I_\alpha$$

Proposizione

Ogni asse normale ad un piano di simmetria materiale è principale d'inerzia

Proposizione

Se un corpo rigido ha due piani di simmetria tra loro ortogonali, allora gli assi principali, rispetto ad ogni punto O della retta r di intersezione, sono dati da r e dalle rette passanti per O appartenenti ai due piani ed ortogonali ad r.

Proposizione

Se un corpo rigido ha una retta r di simmetria materiale, allora tutti gli assi ortogonali a r sono principali d'inerzia e quindi anche r è principale d'inerzia.

Teorema

Quando il corpo rigido è piano, allora un asse principale d'inerzia, rispetto ad un qualsiasi punto del rigido, è ortogonale al piano. Inoltre rispetto ad una terna il cui terzo asse è perpendicolare al piano, si ha $I_{33} = I_{11} + I_{22}$.

Teorema di Huygens

Il momento d'inerzia I_α di un corpo rigido rispetto ad un asse α è uguale alla somma tra il momento di inerzia I_{α_G} del corpo rispetto ad un asse baricentrico α_G parallelo ad α ed il prodotto della massa m del corpo per il quadrato della distanza tra i due assi α ed α_G, i.e.

$$I_\alpha = I_{\alpha_G} + md^2$$

Momento della quantità di moto

- Consideriamo un corpo rigido con punto fisso O
- Si ha

$$\boldsymbol{K}_O = \sum_{s=1}^{N} (P_s - O) \wedge m_s \boldsymbol{v}_s$$

- L'atto di moto è di rotazione, i.e. $\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{w} \wedge (P_s - O)$, da cui

$$\boldsymbol{K}_O = \sum_{s=1}^{N} m_s (P_s - O) \wedge (\boldsymbol{w} \wedge (P_s - O))$$

Sviluppando il prodotto

$$(P_s - O) \wedge (\boldsymbol{w} \wedge (P_s - O))$$

si ha

$$\boldsymbol{K}_O = \mathbb{I}_O \boldsymbol{w}$$

- Dalla relazione precedente capiamo che in genere $\boldsymbol{K}_O$ e $\boldsymbol{w}$ NON sono paralleli.
- Se però l'asse di rotazione è parallelo ad un asse principale d'inerzia, allora $\boldsymbol{K}_O$ è parallelo a $\boldsymbol{w}$
- L'energia cinetica di un corpo rigido con asse fisso O può essere scritta nella seguente forma

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{w}$$

- Se α è un asse fisso per il corpo rigido o è l'asse di istantanea rotazione e α il relativo versore, allora, considerato un punto $O \in \alpha$ ed indicato con P_s^* la proiezione di P_s su α, si ha

$$K_\alpha = \vec{K}_O \cdot \vec{\alpha} = \sum_{s=1}^{N} m_s |P_s - P_s^*|^2 \omega = I_\alpha \omega$$

Momento della quantità di moto di un corpo rigido

Il momento della quantità di moto di un corpo rigido rispetto al polo O è dato da

$$\boldsymbol{K}_O = m(G-O) \wedge (\boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{w} \wedge (O - O')) + \mathbb{I}_O \boldsymbol{w}$$

dove m è la massa del corpo, O' è l'origine di un sistema di riferimento soldale al corpo e G il baricentro.

- Se O è solidale con il rigido, allora

$$\boldsymbol{K}_O = m(G - O) \wedge \boldsymbol{v}_O + \mathbb{I}_O \boldsymbol{w}$$

- Se inoltre $\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{0}$ oppure $O = G$, allora

$$\boldsymbol{K}_O = \mathbb{I}_O \boldsymbol{w}$$