4 Teoremi generali della meccanica dei sistemi materiali

Equazioni cardinali

- Consideriamo un sistema materiale $\mathcal{B}$ costituito da un insieme di punti materiali $(P_1, m_1), (P_2, m_2), \ldots$.
- Una forza attiva o una reazione vincolare che agisce sul punto $P_s \in \mathcal{B}$ è detta interna al sistema materiale se è dovuta all'azione di un altro punto $P_r \in \mathcal{B}$
- Quando questo non avviene la forza o la reazione vincolare è detta esterna al sistema materiale
- Dal Principio di Azione e Reazione segue che se $\boldsymbol{F}^i_{sr}$ è una forza interna che agisce su P_s ed è dovuta a P_r, allora su P_r agisce una forza interna $\boldsymbol{F}^i_{rs}$ dovuta a P_s tale che

$$\boldsymbol{F}^i_{sr} = -\boldsymbol{F}^i_{rs}$$

Proposizione

L'insieme dele forze o reazioni interne ad un sistema materiale costituisce un sistema di vettori applicati avente risultante $\boldsymbol{R}^i$ e momento risultante $\boldsymbol{\Omega}^i_O$ nulli

Teorema (della quantità di moto)

Per un qualsiasi sistema materiale la derivata della quantità di moto $\boldsymbol{Q}$ è uguale al risultante $\boldsymbol{R}^e$ delle forze attive esterne al sistema più il risultante $\boldsymbol{\phi}^e$ delle reazioni vincolari esterne al sisitema:

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}^e(x, \dot{x}, t) + \boldsymbol{\phi}^e$$

dove $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sono l'insieme dei parametri che individuano la posizione del sistema.

Teorema (del moto del baricentro)

Per un qualsiasi sistema materiale

$$m\dot{\boldsymbol{v}}_G = \boldsymbol{R}^e(x, \dot{x}, t) + \boldsymbol{\phi}^e$$

dove m e la massa del sistema e e $\boldsymbol{v}_G$ e la velocità del suo baricentro.

OSSERVAZIONE: il sistema di equazioni differenziali

$$m\dot{\boldsymbol{v}}_G = \boldsymbol{R}^e(x, \dot{x}, t) + \boldsymbol{\phi}^e$$

non determina, in genere, il moto del baricentro G

anche nel caso in cui siano assegnate le condizioni iniziali: il sistema contiene come variabili $(x, \dot{x}, t)$ e $\boldsymbol{\phi}^e$ e dunque un numero di incognite che può essere superiore al numero delle equazioni (=3).
Un caso notevole per il quale l'equazione precedente risulta sufficiente per determinare il moto del baricentro è quello del corpo rigido soggetto alla sola azione della forza peso.

Teorema (del momento della quantità di moto)

Per un qualsiasi sistema materiale la derivata del momento della quantità di moto $\boldsymbol{K}_O$ rispetto ad un polo O fisso o mobile con velocità parallela a quella del baricentro è uguale alla somma tra il momento risultante $\boldsymbol{\Omega}_O^e$ delle forze attive esterne al sistema, rispetto allo stesso polo O, ed il momento risultante $\boldsymbol{\Psi}_O^e$ delle reazioni vincolari esterne al sistema, rispetto allo stesso polo O:

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_O^e(x, \dot{x}, t) + \boldsymbol{\Psi}_O^e$$

Come conseguenza del precedente teorema, si ottiene

Teorema (del momento assiale della q. di moto)

Per un qualsiasi sistema materiale la derivata del momento assiale della quantità di moto K_u rispetto ad un asse fisso $\boldsymbol{u}$ è uguale alla somma tra il momento assiale delle forze attive e vincolari esterne rispetto allo stesso asse:

$$\frac{dK_u}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_O^e \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Psi}_O^e \cdot \boldsymbol{u} = \Omega_u^e + \Psi_u^e$$

Teorema delle forze vive per un sistema materiale vincolato

Teorema (delle forze vive)

Per un qualsiasi sistema materiale vincolato la variazione dell'energia cinetica T è uguale al lavoro elementare di tutte le forze attive (interne ed esterne al sistema materaile) e di tutte le reazioni vincolari (interne ed esterne), cioè

$$dT = dL^{(a,e)} + dL^{(a,i)} + dL^{(v,e)} + dL^{(v,i)}$$

Dal precedente teorema si ha la proposizione seguente:

Proposizione: Per un corpo rigido

- $dL^{a,i} = 0$ e $dL^{v,i} = 0$.
- la variazione dell'energia cinetica T del corpo rigido è uguale al lavoro elementare di tutte le forze attive esterne al corpo e di tutte le reazioni vincolari esterne al corpo

$$dT = dL^{(a,e)} + dL^{(v,e)}$$

Sempre per un corpo rigido, i vincoli di rigidità sono indipendenti dal tempo, quindi si ha anche

$$\delta L^{(a,i)} = 0, \qquad \delta L^{(v,i)} = 0.$$

Come applicazione di queste uguaglianze, diamo la seguente

Proposizione: Per un sistema materiale, anche non rigido, a vincoli fissi e bilaterali, il lavoro elementare delle reazioni vincolari (interne ed esterne) è nullo, cioè

$$dL^{(v)} = 0$$

Dimostrazione.
- Dal principio delle reazioni vincolari si ha

$$\delta L^{(v)} = \sum_{s=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_s \cdot \delta P_s \geq 0, \quad \forall \delta P_s.$$

- Se un sistema è a vincoli bilaterali, allora $\delta L^{(v)} = 0$, $\forall \delta P_s$
- Se un sistema è a vincoli fissi, si ha $\delta P_s = dP_s$, compatibile con i vincoli. Quindi $\delta L^{(v)} = dL^{(v)}$.
- Ne segue che $dL^{(v)} = 0$.

Teorema di conservazione dell'energia meccanica per un sisitema materiale vincolato

Teorema (di conservazione dell'energia meccanica per un s.m. vincolato)

Se su un sistema materiale vincolato agiscono forze conservative con potenziale U ed i vincoli sono fissi e bilaterali, allora

$$T(t) - U(t) = E,$$

dove $E = T_0 - U_0$ con T_0 ed U_0 rispettivamente energia cinetica e funzione potenziale iniziali.

Dimostrazione

- Dal teorema delle forze vive per sistemi vincolati, si ha

$$dT = dL^{(a,e)} + dL^{(a,i)} + dL^{(v,e)} + dL^{(v,i)}$$

- I vincoli sono fissi e bilateri, quindi $\delta L^{(v)} = dL^{(v)} = 0$.
- Sul sistema agiscono solo forze conservative, quindi $dL^{(a)} = dU$
- $\Rightarrow d(T - U) = 0$.

Integrali primi

Abbiamo già introdotto il concetto di integrale primo associato al moto di un punto materiale. Adesso possiamo estenderlo al caso di un sistema materiale di punti. Per un sistema materiale, il moto è definito dalle soluzioni delle $3N$ equazioni differenziali

$$m_s \ddot{\boldsymbol{x}}_s = \boldsymbol{F}_s(x, \dot{x}, t) + \boldsymbol{\Phi}_s, \quad s = 1, ..., N \tag{1}$$

tenendo anche conto delle relazioni che esprimono i vincoli. Nella precedente equazione $\boldsymbol{x}_s$ è il vettore posizione del punto P_s, $\boldsymbol{F}_s$ e $\boldsymbol{\Phi}_s$ sono il risultante delle forze e delle reazioni agenti sul punto.

Definizione

Chiamiamo integrale primo di moto per il sistema descritto dalle equazioni (1), ogni equazione differenziale del primo ordine

$$\phi(x, \dot{x}, t) = cost. \tag{2}$$

che risulta una conseguenza diretta di (1) (i.e. ogni soluzione di (1) è anche soluzione di 2).

- Dato un sistema di forze agenti sui punti P_s, non è detto che esista un integrale primo del moto.
- Quando esiste, un integrale primo non deve dipendere necessariamente da tutte le variabili $(x, \dot{x}, t)$, ma potrebbe ad esempio anche essere una relazione algebrica tra le coordinate x.
- Un esempio di integrale primo del moto è l'energia meccanica in un sistema vincolato con vincoli fissi e bilateri sul quale agiscono solo forze conservative. Altri esempi vengono dati qui di seguito.

Esempi

- Consideriamo un sistema materiale vincolato in cui $\boldsymbol{R}^e$ e $\boldsymbol{\Phi}^e$ siano ortogonali ad una data retta di versore $\boldsymbol{u}$. Quindi

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u} = \underbrace{\boldsymbol{R}^e\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Phi}^e\cdot\boldsymbol{u}}_{=0}$$

da cui $\boldsymbol{v}_G\cdot\boldsymbol{u} = cost.$
Il sistema cannone-proiettile è un esempio di applicazione della precedente legge di conservazione.

- Consideriamo un sistema materiale vincolato per cui $\boldsymbol{R}^e + \boldsymbol{\Phi}^e = 0$. Quindi

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{Q} = \underbrace{\boldsymbol{R}^e + \boldsymbol{\Phi}^e}_{=0}$$

da cui $\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{k}$, dove $\boldsymbol{k}$ è un vettore costante (tre integrali primi).
Applicazione: studio del moto del sistema solare.

- Consideriamo un sistema materiale vincolato per cui $\Omega_u^e + \Psi_u^e = 0$ rispetto ad una data retta di versore $\boldsymbol{u}$. Quindi

$$\frac{d}{dt}K_u = \underbrace{\Omega_u^e + \Psi_u^e}_{=0}$$

da cui $K_u(x,\dot{x},t) = cost.$

- Consideriamo un sistema materiale vincolato per cui $\boldsymbol{\Omega}^e_O + \boldsymbol{\Psi}^e_O = \mathbf{0}$ rispetto ad un polo O. Quindi

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_O = \underbrace{\boldsymbol{\Omega}^e_O + \boldsymbol{\Psi}^e_O}_{=0}$$

da cui $\boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{k}$, dove $\boldsymbol{k}$ è un vettore costante (tre integrali primi).