6 Meccanica analitica

Introduzione

- Consideriamo un sistema materiale vincolato $\mathbb{B}$, costituito da N punti materiali $(P_1, m_1)...(P_N, m_N)$. - Utilizzando l'equazione fondamentale della dinamica applicata ad ogni punto P_s del sistema materiale, si ha

$$m_s \dot{\boldsymbol{v}}_s = \boldsymbol{F}_s(x, \cdot x, t) + \boldsymbol{\phi}_s, \qquad s = 1, ..., N \tag{1}$$

Essendo il sistema vincolato, bisogna utilizzare anche il principio delle reazioni vincolari

$$\sum_{s=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_s \cdot \delta P_s \geq 0, \quad \forall \delta P_s \tag{2}$$

per avere indicazioni almeno sulla direzione delle reazioni vincolari (che sono incognite).

Obiettivo: sviluppare un procedimento che consenta di sintetizzare le precedenti equazioni in un unico principio che non contenga le reazioni vincolari.

Equazioni simbolica della dinamica

- Definiamo la quantità $\boldsymbol{F}_s(x, \dot{x}, t) - m_s \dot{\boldsymbol{v}}_s$ in (1) forza perduta.
- Da (1) e (2) otteniamo

$$\sum_{s=1}^{N} (\boldsymbol{F}_s(x, \dot{x}, t) - m_s \dot{\boldsymbol{v}}_s) \cdot \delta P_s \leq 0, \quad \forall \delta P_s \qquad (3)$$

-Tale disuguaglianza si applica ad ogni sistema materiale
- La (3) è quindi CONDIZIONE NECESSARIA nello studio del moto di un qualsiasi sistema materiale.
- La (3) è detta equazione simbolica della dinamica.

Principio di d'Alembert

- Se applicata ad un qualsiasi sistema materiale, la (3) permette sempre di determinarne il moto.
- Possiamo quindi ritenere che la (3) riassuma in se tutte le proprietà del moto.

Le precedenti osservazioni sono formalizzate nel seguente

Principio (di D'Alembert)

Assegnato un sistema materiale la cui generica configurazione x sia del tipo $x = (x_1, ..., x_n)$, CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE affinchè una funzione

$$x : [0, T] \to \mathbb{R}^n,$$

sia un possibile moto per il sistema, è che sia verificata la relazione

$$\sum_{s=1}^{N} (\boldsymbol{F}_s(x, \dot{x}, t) - m_s \dot{\boldsymbol{v}}_s) \cdot \delta P_s \leq 0, \ \forall \delta P_s, \ \forall t \in [0, T]$$

<u>Esempio</u>: trovare le equazioni del moto per il pendolo semplice tramite il principio di D'Alembert.

Teorema

Le equazioni cardinali della dinamica insieme con il principio delle reazioni vincolari sono condizioni sufficienti per lo studio del moto di un sistema materiale rigido.

<u>Dimostrazione</u>: dall'equazione (3) applicata ad un

sistema materiale rigido si ha:

$$\sum_{s=1}^{N} (\boldsymbol{F}_s(x,\dot{x},t) - m_s\dot{\boldsymbol{v}}_s) \cdot (\delta O + \boldsymbol{w}\delta t \wedge (P_s - O)) =$$
$$= \left(\boldsymbol{R}^e - \frac{d}{dt}\boldsymbol{Q}\right) \cdot \delta O + \left(\boldsymbol{\Omega}^e_O - \frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_O\right) \cdot \boldsymbol{w}\delta t$$

Dal principio delle reazioni vincolari per un corpo rigido si ha

$$\boldsymbol{\phi}^e \cdot \delta O + \boldsymbol{\Psi}^e_O \cdot \boldsymbol{w}\delta t \geq 0.$$

Mediante le equazioni cardinali della dinamica si ha

$$\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{R}^e - \boldsymbol{\phi}^e\right) \cdot \delta O + \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_O - \boldsymbol{\Omega}^e_O - \boldsymbol{\Psi}^e_O\right) \cdot \boldsymbol{w}\delta t = 0.$$

Ne segue che la validità delle equazioni cardinali comporta la verifica della relazione simbolica della dinamica.

Relazione simbolica della statica.

Una posizione di equilibrio per un sistema materiale è una configurazione x_e tale che, posto inizialmente il sistema in x_e con atto di moto nullo, il corrispondente moto è la quiete, i.e. se $x(0) = x_e$ e $\dot{x}(0) = 0$, allora la soluzione delle equazioni del moto è data da

$$x(t) = x_e, \quad \forall t \geq 0.$$

Se x_e è una configurazione di equilibrio, allora la funzione $x(t) = x_e$ rappresenta un moto possibile (la quiete), che deve verificare il principio di D'Alembert e quindi (3). Sostituendo pertanto $x(t) = x_e$ in (3) si ha

$$\delta L^{(a)} = \sum_{s=1}^{N} (\boldsymbol{F}_s(x, \dot{x}, t)) \cdot \delta P_s \leq 0, \quad \forall \delta P_s. \tag{4}$$

- L'equazione (4) è quindi una condizione necessaria per l'equilibrio.
- L'equazione (4) è detta relazione simbolica della statica.

Proposizione

La relazione simbolica della statica è anche una condizione sufficiente affinchè una configurazione x_e sia di equilibrio per un sistema materiale a **vincoli indipendenti dal tempo**.

- Infatti, supponiamo che per la configurazione x_e valga (4). Allora la funzione $x(t) = x_e$ è un moto possibile. Infatti verifica la relazione (2) e soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = x_e$ e $\dot{x}(0) = 0$. Quindi, se i vincoli sono indipendenti dal tempo, x_e è una configurazione di equilibrio poichè alle condizioni iniziali $x(0) = x_e$ e $\dot{x}(0) = 0$ corrisponde il moto $x(t) = x_e$ (la quiete).
- È importante supporre i vincoli indipendenti dal tempo: ad esempio, per un punto appoggiato su un piano orizzontale e soggetto alla sola forza peso, con il piano che trasla verticalmente verso l'alto, l'equazione (4) è verificata, ma il punto non è in equilibrio.

I precedenti risultati possono essere riassunti con il seguente principio:

Principio (dei lavori virtuali)

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè una configurazione x_e sia di equilibrio per un sistema materiale a **vincoli fissi**, è che il lavoro virtuale delle forze attive, calcolato nella configurazione di equilibrio x_e con atto di moto nullo e per tutti i $t \geq 0$, sia minore o uguale a zero, i.e.

$$\delta L^{(a)} = \sum_{s=1}^{N} (\boldsymbol{F}_s(x, \dot{x}, t)) \cdot \delta P_s \leq 0, \quad \forall \delta P_s, \forall t \geq 0.$$

Quando gli spostamenti virtuali sono **invertibili**, la relazione precedente vale con il segno di uguale.

Esercizi:
- determinare le condizioni per l'equilibrio di un corpo rigido con punto fisso.
- determinare le condizioni per l'equilibrio di un corpo rigido con asse fisso.
- determinare le condizioni per l'equilibrio di un disco omogeneo pesante, che rotla senza strisciare su un piano inclinato ed il cui centro è collegato mediante una molla ad un punto O del piano.

Condizioni di equilibrio per un sistema olonomo.

Forze generalizzate di Lagrange

- Dato un sistema materiale olonomo a n gradi di libertà, ogni punto P_s di tale sistema è del tipo

$$P_s = \hat{P}_s(q_1, ..., q_n, t), \quad s = 1, ..., N.$$

- Lo spostamento **virtuale** è dato da (**si noti l'assenza del termine** $\frac{\partial \hat{P}_s}{\partial t}$)

$$\delta P_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \hat{P}_s}{\partial q_i} \delta q_i, \quad s = 1, ..., N.$$

- Il lavoro virtuale di un sistema di forze attive $\boldsymbol{F}_s, P_s$ è dato da

$$\delta L^{(a)} = \sum_{s=1}^{N} \boldsymbol{F} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \hat{P}_s}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{N} \boldsymbol{F}_s \cdot \frac{\partial \hat{P}_s}{\partial q_i} \right) \delta q_i.$$

- Le quantità scalari

$$Q_i = \sum_{s=1}^{N} \boldsymbol{F}_s \cdot \frac{\partial \hat{P}_s}{\partial q_i}, \quad i = 1, ..., n,$$

sono dette forze generalizzate di Lagrange o componenti Lagrangiane del sistema delle forze attive.

Configurazioni interne o di confine

- Una configurazione $(q_1, ..., q_n)$ è detta interna per il sistema materiale se ogni spostamento virtuale del sistema a partire da tale configurazione è invertibile.
- Una configurazione $(q_1, ..., q_n)$ è detta di confine per il sistema materiale se esiste almeno uno spostamento virtuale del sistema a partire da tale configurazione che non è invertibile.

Esempi:
- un punto materiale libero possiede solo configurazioni interne.
- Un punto materiale vincolato a muoversi sul segmento $x \in [a, b]$ possiede $x \in (a, b)$ come configurazioni interne ed $x = \{a, b\}$ come configurazioni di confine.
- Un punto materiale che si muove in una stanza possiede come configurazioni di confine tutte quelle relative alle pareti, le altre sono interne.

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una configurazione x_e sia di equilibrio per un **sistema olonomo a vincoli bilaterali ed indipendenti dal tempo** o che assume configurazioni interne è che siano nulle le forze generalizzate di Lagrange in corrispondenza della configurazione x_e con atto di moto nullo, i.e.

$$Q_i(x_e, 0, t) = 0, \qquad i = 1, ..., n$$

Infatti, dal PLV, con i vincoli bilaterali, per ogni posizione di equilibrio $x_e = (q_1, ..., q_n)$, si ha

$$\delta L^{(a)} = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x_e, 0, t)\delta q_i = 0,$$

da cui, per l'arbitrarietà della scelta delle variazioni $\delta q_1, ..., \delta q_n$ risulta

$$Q_i(x_e, 0, t) = 0, \qquad i = 1, ..., n.$$

Viceversa, se $Q_i(x_e, 0, t) = 0$, $i = 1, ..., n$ allora $\delta L^{(a)} = \sum_i Q_i \delta q_i = 0$ e quindi, per il PLV, la posizione x_e è di equilibrio.

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una configurazione x_e sia di equilibrio per un **sistema olonomo a vincoli unilaterali ed indipendenti dal tempo** o che assume configurazioni di confine è che siano nulle quelle forze generalizzate Q_i corrispondenti ai parametri lagrangiani che caratterizzano le posizioni di confine, i.e.

$$Q_i(x_e, 0, t) = 0, \qquad i = 1, ..., k \tag{5}$$

mentre per le restanti forze lagrangiane sia soddisfatta la disuguaglianza

$$\sum_{i=k+1}^{n} Q_i(x_e, 0, t)\delta q_i \leq 0, \tag{6}$$

in corrispondenza di spostamenti non invertibili.

- Consideriamo un sistema olonomo a vincoli unilaterali e indipendenti dal tempo, di coordinate lagrangiane $(q_1, ..., q_n)$. Supponiamo che quando il sistema evolve, assumendo solo configurazioni di confine, esso sia caratterizzato da $k < n$ parametri lagrangiani

indipendenti tra loro. Siano ad esempio $q_1, ..., q_k$.
- A causa delle limitazioni negli spostamenti, il sistema ha k gradi di libertà, quindi $\delta q_{k+1} = ... = \delta q_n = 0$, mentre $\delta q_1, ..., \delta q_k$ sono arbitrari. Allora, per ogni configurazioni x_e di equilibrio e di confine, si ha

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i(x_e, 0, t)\delta q_i = 0, \quad \forall \delta q_1, ..., \delta q_k$$

- Inoltre, partendo da x_e si possono eseguire spostamenti non invertibili, per i quali si ha

$$\delta L^{(a)} = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x_e, 0, t)\delta q_i \leq 0.$$

utilizzando (5) si ha (6).

Calcolo delle reazioni vincolari mediante il PLV.

- Nel PLV non intervengono le reazioni vincolari, che sono incognite del problema.
- Mediante il PLV e possibile comunque calcolare le reazioni vincolari.
- si sopprime il vincolo e lo si sostituisce con la relativa reazione vincolare $\boldsymbol{\phi}$ applicata nel corrispondente punto A.
- si applica il PLV al nuovo sistema:

$$\delta L^{(a)} + \boldsymbol{\phi} \cdot \delta A \leq 0.$$

- gli spostamenti virtuali sono comprensivi anche di quelli che il vincolo soppresso permette.

Esempio

Consideriamo una trave appoggiata su due punti A e B, disposti alla stessa altezza e supponiamo che le forze attive sull'asta siano equivalenti ad un'unica forza $\boldsymbol{F}$ normale al vettore $A - B$ ed applicata in un punto interno al segmento AB e distante a e b rispettivamente da A e B. Applicando il PLV, calcoliamo ad esempio $\boldsymbol{\phi}_A$. A tal fine:

- sopprimiamo il vincolo di appoggio in A e lo sostituiamo con la reazione vincolare incognita $\boldsymbol{\phi}_A$ applicata in A.
- applichiamo il PLV (ora sono possibili spostamenti di rotazione attorno a B):

$$\boldsymbol{F} \cdot \delta O + \boldsymbol{\phi} \cdot \delta A = 0,$$

- indicato con θ l'angolo di rotazione attorno a B, si ha

$$Fb\delta\theta - \phi_A(a+b)\delta\theta = 0, \Rightarrow \phi_A = \frac{b}{a+b}F$$

Sistemi olonomi sollecitati da forze conservative.

- Sia dato un sistema materiale olonomo, di parametri lagrangiani $q_1, ...q_n$, la cui sollecitazione attiva sia conservativa.
- Per questo sistema si ha

$$dL^{(a)} = dU \tag{7}$$

dove la funzione potenziale U è una funzione solo della configurazione del sistema (quindi $U = U(q_1, ..., q_n)$).

- Si ha quindi

$$dU = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i$$

- Per la ricerca delle configurazioni di equilibrio consideriamo sistemi olonomi con vincoli indipendenti dal tempo. Ne consegue che $\delta q_i = dq_i$, $i = 1, ..., n$ e $dU = \delta U$.
- Confrontando l'equazione

$$dL^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_s \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_{i=1}^{n} Q_i dq_i$$

con (7) si ottiene

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, ..., n.$$

- Applicando il PLV si ha poi:

$$\delta L^{(a)} = \delta U \leq 0, \tag{8}$$

i.e.il potenziale, in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio, deve subire un incremento non positivo.
- Se i vincoli sono bilaterali, la (8) diventa

$$\delta U = 0.$$

In tale caso le posizioni di equilibrio sono quelle che rendono stazionario il potenziale. Pertanto si ritrova che, per un sistema olonomo, le configurazioni x_e di equilibrio sono quelle per cui

$$Q_i(x_e, 0, t) = \frac{\partial U}{\partial q_i}(x_e, 0, t) = 0, \quad i = 1, ..., n$$

Teorema di Torricelli

- Consideriamo sistemi olonomi in cui le forze attive siano solo le forze peso
- Il potenziale della forza peso è

$$U = -mgx_3(G)$$

dove m è la massa del corpo e $x_3(G)$ è la quota del baricentro.
- La (8) diventa

$$\delta U = -mg\delta x_3(G) \leq 0.$$

Possiamo allora enunciare il seguente
Teorema (di Torricelli): Per un sistema materiale, la cui forza attiva agente sia solo la forza peso, le configurazioni di equilibrio sono quelle per cui il baricentro del sistema non si abbassa in corrispondenza di ogni spostamento virtuale. Nel caso di vincoli

bilaterali, allora $\delta x_3(G) = 0$ e le configurazioni di equilibrio sono tali che la quota del baricentro risulti stazionaria.

Equazioni di Lagrange

- Consideriamo un sistema olonomo a vincoli bilaterali e ad n gradi di libertà.
- Siano $q_1, ..., q_n$ i corrispondenti parametri lagrangiani.

Obiettivo: studiare il moto del sistema.

- Partiamo dall'equazione simbolica della dinamica, nell'ipotesi di vincoli bilaterali si ha

$$\sum_{s=1}^{N} (\boldsymbol{F}(x, \dot{x}, t) - m_s \dot{\boldsymbol{v}}_s) \cdot \delta P_s = 0. \quad \forall \delta P_s$$

Ma

$$\delta P_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta P_s}{\delta q_i} \delta q_i,$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{N} \left(\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i} - m_s \dot{\boldsymbol{v}}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0, \quad \forall \delta q_i$$

- Utilizzando le forze generalizzate di lagrange

$$Q_i = \sum_{s=1}^{N} \boldsymbol{F}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i}, \quad i = 1, ..., n,$$

possiamo scrivere

$$\sum_{i=1}^{n} (Q_i - \tau_i)\delta q_i = 0, \quad \forall \delta q_i$$

dove

$$\tau_i = \sum_{i=1}^{N} m_s \dot{\boldsymbol{v}}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i} =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} m_s \left[\frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{v}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \right) - \boldsymbol{v}_s \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \right]$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} m_s \boldsymbol{v}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \right) - \sum_{s=1}^{N} m_s \boldsymbol{v}_s \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial P_s}{\partial q_i}$$

- Dalla definizione di velocità per un sistema olonomo si ha

$$\boldsymbol{v}_s = \frac{d}{dt} P_s(q_1, ..., q_n, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial P_s}{\partial t}$$

da cui

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial P_s}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial q_j} = \sum_{i=}^{n} \frac{\partial^2 P_s}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 P_s}{\partial t \partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial P_s}{\partial q_j}$$

Sia $T = 1/2 \sum m_s \boldsymbol{v}_s^2$ l'energia cinetica del sistema materiale. Calcoliamo

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_s \dot{\boldsymbol{v}}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i}\right) - \sum_{s=1}^{N} m_s \dot{\boldsymbol{v}}_s \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial P_s}{\partial q_i} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_s \dot{\boldsymbol{v}}_s \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial \dot{q}_i}\right) - \sum_{s=1}^{N} m_s \dot{\boldsymbol{v}}_s \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial q_i}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s \frac{\partial \boldsymbol{v}_s^2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s \frac{\partial \boldsymbol{v}_s^2}{\partial q_i} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

-Consideriamo ora l'equazione

$$\sum_{i=1}^{n} (Q_i - \tau_i)\delta q_i = 0,$$

Poichè le variazioni δq_i sono arbitrarie, si ottiene

$$\tau_i = Q_i, \quad i = 1...n$$

e cioè

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, ..., n$$

che rappresentano n equazioni differenziali per le n coordinate lagrangiane q_i dette equazioni di Lagrange. In tali equazioni:
- la struttura dell'energia cinetica T è legata alla natura materiale e geometrica del sistema meccanico.
- le forze generalizzate Q_i riassumono il comportamento sul sistema delle forze attive.

-Verifichiamo, attraverso un esempio, che, mediante le equazioni di Lagrange, si ottiene l'equazione fondamentale della dinamica.

Consideriamo un punto materiale libero P, di massa m. Il punto P ha tre gradi di libertà. Scegliamo come parametri lagrangiani $(q_1, q_2, q_3) = (x_1, x_2, x_3)$ le coordinate del punto P nel riferimento cartesiano ortogonale $Ox_1x_2x_3$. Il punto è soggetto all'azione della forza $\boldsymbol{F}(x_1, x_2, x_3)$. Determiniamo le equazioni

di Lagrange per il punto P.
- L'energia cinetica del punto P è $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right)$.
- Le forze generalizzate di Lagrange sono $Q_i = F_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$.
- Le equazioni di Lagrange sono quindi

$$m\ddot{x}_i = F_i, \qquad i = 1, 2, 3$$

Esercizio: determinare le equazioni del moto per un pendolo fisico tramite le equazioni di Lagrange.

Esercizio: in un piano Oxy, due aste rigido AB e BC, di uguale massa m e uguale lunghezza 2ℓ, sono collegate con una cerniera in B. Il punto A è fisso e il sistema oscilla sotto l'azione della sola forza peso. Introdotti gli angoli θ_1 e θ_2 che le aste formano con la direzione verticale, determinare le equazioni del moto tramite le equazioni di Lagrange.

Equazioni di Lagrange per un sistema conservativo.

- Consideriamo un sistema soggetto a forze attive conservative.

- Esiste quindi un potenziale $U(q_1, ..., q_n)$ tale che le componenti lagrangiane delle forze siano

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, ..., n.$$

- Introduciamo la funzione $\mathcal{L} = T + U$, detta Lagrangiana.
- Si osservi che $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$.
- Inoltre si ha

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i, \quad i = 1, ..., n$$

- Quindi le equazioni di Lagrange per sistemi conservativi possono essere riscritte nella seguente forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, ..., n \tag{9}$$

Osservazione: i sistemi conservativi non sono gli unici che permettono di ricavare le equazioni del moto tramite una funzione lagrangiana. Infatti se un sistema di forze attivo è tale che le relative forze generalizzate di Lagrange Q_i possono essere espresse dalle relazioni

$$Q_i = -\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}, \qquad i = 1, ..., n \tag{10}$$

dove la funzione $U = U(q, \dot{q}, t)$ è detta potenziale generalizzato, allora la funzione lagrangiana del sistema è data da $\mathcal{L} = T + U$ e le equazioni del moto sono date dalle equazioni di Lagrange (9).

È bene osservare però che il potenziale generalizzato può dipendere solo linearmente da $\dot{q}_i$. Infatti dalla definizione (10) si ha

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j - \sum_j \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_j - \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial t}$$

e poichè le Q_i non dipendono da $\ddot{q}_i$ deve risultare

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = 0, \qquad i, j = 1, ..., n.$$

Esempi notevoli di forze per le quali è possibile introdurre un potenziale generalizzato sono dati dalla forza di Lorentz (che descrive il moto di una carica in un campo elettromagnetico) e le forze di attrito viscoso.

Osservazione: se una delle variabili q_i non appare nella funzione lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, allora dalle equazioni di Lagrange segue che

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = cost.$$

e cioè la funzione $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ è un integrale primo del moto.