Quaderno delle esercitazioni A.A. 2019/2020

Federico Zullo

DICATAM, Università di Brescia

Indirizzo: via Valotti 9 (piano terra), 25133 Brescia.

Email: federico.zullo@unibs.it

federico-zullo.unibs.it

NOTA BENE: *Il presente materiale è una raccolta degli esercizi proposti e/o svolti in classe. Per un'adeguata preparazione è necessario un approfondimento e completamento dei temi trattati tramite un lavoro autonomo di teoria ed esercizi.*

21/02/2020

1. Dati i vettori nel piano $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}}_1 + 2\hat{\mathbf{i}}_2$, $\mathbf{v} = 2\hat{\mathbf{i}}_1 + 3\hat{\mathbf{i}}_2$ e $\mathbf{w} = -\hat{\mathbf{i}}_1 - \hat{\mathbf{i}}_2$ determinare i loro moduli, le loro direzioni e i loro versi.

2. Un vettore nel piano (x, y) ha modulo pari 2 e forma un angolo pari a $\pi/4$ con la direzione positiva dell'asse delle x. Determinare la sua rappresentazione cartesiana.

3. Scrivendo i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ come somma delle loro componenti cartesiane, mostrare che la definizione cartesiana di prodotto scalare è data da $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$.

4. Scrivendo i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ come somma delle loro componenti cartesiane, mostrare che la definizione cartesiana di prodotto vettoriale è data da $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$.

5. Dati i vettori $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}}_1 + 2\hat{\mathbf{i}}_2 - \hat{\mathbf{i}}_3$ e $\mathbf{v} = 3\hat{\mathbf{i}}_1 - 2\hat{\mathbf{i}}_2 + \hat{\mathbf{i}}_3$ determinare i vettori $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

6. Verificare che i vettori $\mathbf{v}_1 = 2\hat{\mathbf{i}}_1 - \hat{\mathbf{i}}_2 + 10\hat{\mathbf{i}}_3$ e $\mathbf{v}_2 = 3\hat{\mathbf{i}}_1 + 6\hat{\mathbf{i}}_2$ sono perpendicolari, mentre i vettori $\mathbf{u}_1 = 2\hat{\mathbf{i}}_1 - \hat{\mathbf{i}}_2 + \hat{\mathbf{i}}_3$ e $\mathbf{u}_2 = 4\hat{\mathbf{i}}_1 - 2\hat{\mathbf{i}}_2 + 2\hat{\mathbf{i}}_3$ sono paralleli.

7. Dimostrare il teorema di Carnot: in ogni triangolo, il quadrato della misura di un lato è pari alla somma dei quadrati delle misure degli altri due lati, meno il loro doppio prodotto moltiplicato per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

8. Dimostrare il teorema dei seni: in ogni triangolo, il rapporto tra la misura di un lato ed il seno dell'angolo ad esso opposto è costante.

9. Dato il vettore $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$, scomporre il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ lungo le componenti parallela e perpendicolare a $\mathbf{w}$.

10. Calcolare la derivata prima e seconda della seguente funzione vettoriale $\mathbf{u}(\xi) = 3\xi^3\hat{\mathbf{i}}_1 + \xi^2\hat{\mathbf{i}}_2 + 4\hat{\mathbf{i}}_3$.

11. Verificare che il vettore $\mathbf{u} = \cos(2t)\hat{\mathbf{i}}_1 + \sin(2t)\hat{\mathbf{i}}_2$ ha modulo costante. Successivamente calcolare la derivata di $\mathbf{u}$ rispetto a t e verificare che $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ e $\mathbf{u}$ sono ortogonali. Infine verificare che $\mathbf{u} \wedge \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{c}$, dove $\mathbf{c}$ è un vettore costante.

12. Dato il sistema di vettori nel piano $(\mathbf{u}_1, A_1)$ e $(\mathbf{u}_2, A_2)$, con $\mathbf{u}_1 = (a, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, b)$, $A_1 = (0, \alpha)$, $A_2 = (\beta, 0)$, calcola il momento del sistema $\mathbf{M}_O$ rispetto all'origine e rispetto al polo $O' = (-1, -1)$. Successivamente ottieni il momento $\mathbf{M}_{O'}$ con la legge di variazione dei momenti.

13. Dato il sistema di vettori nel piano $(\mathbf{u}_1, A_1)$ e $(\mathbf{u}_2, A_2)$, con $\mathbf{u}_1 = (a, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, b)$, $A_1 = (0, \alpha)$, $A_2 = (\beta, 0)$, trova algebricamente i punti del piano O' tali che, scelti come polo, danno un momento del sistema pari a quello calcolato nell'origine. Verifica successivamente che i punti $O' - O$ giacciono su una retta parallela ad $\mathbf{R}$.

14. Un punto si muove su una circonferenza di raggio R. La sua posizione è descritta in ogni istante t dalla curva $\mathbf{x}(t) = R\cos(\alpha t)\hat{\mathbf{i}}_1 + R\sin(\alpha t)\hat{\mathbf{i}}_2$, dove α è una costante positiva. Verificare che la terna intrinseca è data da $\mathbf{T} = -\sin\left(\frac{s}{R}\right)\hat{\mathbf{i}}_1 + \cos\left(\frac{s}{R}\right)\hat{\mathbf{i}}_2$, $\mathbf{N} = -\cos\left(\frac{s}{R}\right)\hat{\mathbf{i}}_1 - \sin\left(\frac{s}{R}\right)\hat{\mathbf{i}}_2$, $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}}_3$.

15. Un punto si muove su un'elica circolare di raggio R e passo $2\pi h$. La sua posizione è descritta in ogni istante t dalla curva $\mathbf{x}(t) = \cos(\alpha t)\hat{\mathbf{i}}_1 + \sin(\alpha t)\hat{\mathbf{i}}_2 + h\alpha t\hat{\mathbf{i}}_3$, dove α è una costante positiva. Dopo aver determinato l'ascissa curvilinea s, trovare la terna intrinseca $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$, la curvatura k e la torsione τ.

16. Un punto si muove su una spirale logaritmica: la sua posizione è descritta in ogni istante t dalla curva $\mathbf{x}(t) = ae^{bt}\cos(t)\hat{\mathbf{i}}_1 + ae^{bt}\sin(t)\hat{\mathbf{i}}_2$, dove a e b sono due costanti positive. Determinare la terna intrinseca della curva e verifica che il raggio di cutvatura, in termini del parametro t, è dato da $a\sqrt{1+b^2}e^{bt}$.

17. Dato il sistema di vettori piani e paralleli $(\mathbf{v}_1, A_1)$ e $(\mathbf{v}_2, A_2)$:

$$\mathbf{v}_1 = (0,1,0), \qquad \mathbf{v}_2 = (0,-v,0),$$
$$A_1 = (1,2,0), \qquad A_2 = (2,1,0),$$

con $v \neq 1$, determinare

- Risultante e momento risultante rispetto all'origine.
- Invariante scalare.
- Equazione cartesiana dell'asse centrale.
- Valore del momento rispetto ad un punto dell'asse centrale.
- Un sistema equivalente.

18. Determinare l'equazione dell'asse centrale per il sistema di vettori paralleli $\mathbf{v}_k = (0,0,k)$ applicati in $A_k = (0,k,0)$, $k = 1..N$.

19. Determinare l'equazione dell'asse centrale per un sistema di vettori paralleli $\mathbf{v}_k = a_k\hat{\mathbf{v}}$ applicati nei punti A_k, $k = 1..N$. Verificare che esiste un punto C che giace sull'asse centrale qualsiasi sia l'orientazione comune dei vettori $\mathbf{v}$.

28/02/2020 (e-learning)

1. Applicando la definizione di velocità areale, mostrare che l'area di un disco di raggio R è πR^2.

2. Applicando la definizione di velocità areale, mostrare che l'area interna ad un ellisse di semiassi a e b è πab.

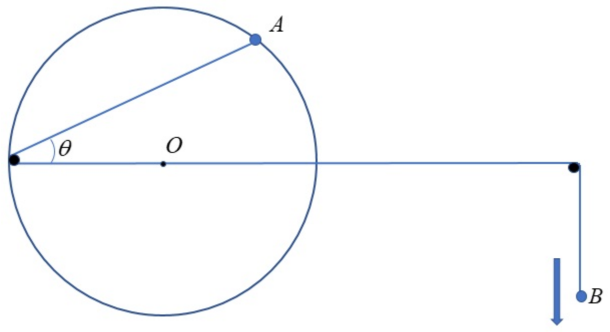

Figura 1:

3. Un punto P si muove su un piano con velocità costante in modulo e con velocità radiale, rispetto ad un punto fisso O, anch'essa costante in modulo. Determinare l'accelerazione e la traiettoria del punto.

4. Determinare coordinate, velocità e accelerazione dei punti A e B in figura (1) in funzione della coordinata θ. I due punti sono tenuti da un filo lungo ℓ, mentre i pioli neri sono fissi a distanza d. Il punto A può scorrere senza attrito lungo la circonferenza (fissa anch'essa). Si assuma $\theta \in (0, \pi/2)$.

5. Una semicirconferenza di centro C e raggio R ha gli estremi del diametro orizzontale vincolati a scorrere con velocità costante $\vec{u}$ lungo una guida (orizzontale anch'essa). A $t = 0$ l'estremo sinistro A coincide con l'origine O. Determinare
   - le coordinate, la velocità e l'accelerazione dei punti della circonferenza.
   - le coordinate, la velocità e l'accelerazione di un punto mobile sulla circonferenza.

6. Un'asta rigida di lunghezza $2L$ è vincolata a giacere sul paino (x, y). Determina i gradi di libertà del sistema e le configurazioni dei punti dell'asta tramite opportune coordinate lagrangiane. Determina successivamente velocità e accelerazione di un arbitrario punto P dell'asta in funzione delle coordinate lagrangiane.

7. Una lamina rettangolare $ABCD$ di lati $AB = CD = a$, $BC = AD = b$ è vincolata a giacere sul piano (x, y) e ad avere il lato AB sull'asse $y = \tan(\theta)x$, giacendo sul semipiano superiore rispetto all'asse. Determina i gradi di libertà del sistema e le configurazioni dei punti della lamina tramite opportune coordinate lagrangiane.

8. Un disco di raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse x. Si determini la traiettoria di un punto P sul bordo del disco.

07/03/2020 (e-learning)

1. Parametrizzare tramite gli angoli di Eulero (in figura 2) i coseni direttori degli assi solidali ad un corpo rigido rispetto ad un sistema di riferimento fisso.

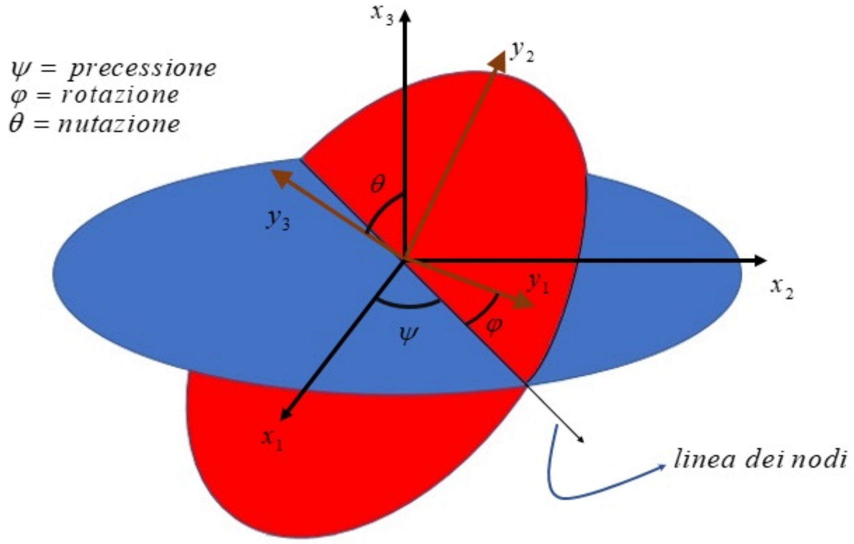

Figura 2:

2. Un punto P si muove su una circonferenza di centro C e raggio R. La circonferenza ruota, nel piano Oxy, con velocià angolare $\boldsymbol{\omega}$ intorno ad un punto fisso che coincide con un punto della circonferenza stessa. Al tempo $t = 0$ il punto C ha coordinate $(R, 0, 0)$. Calcolare le coordinate del punto P, la sua velocità e la sua accelerazione.

3. Dal punto di vista puramente matematico, la legge di variazione dei momenti $\mathbf{M}_P = \mathbf{M}'_O + \mathbf{R} \wedge (P - O')$ è formalmente analoga alla legge fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}'_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O')$. Data questa analogia, stabilire, per un corpo rigido, nel caso $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, le seguenti affermazioni:
   - L'invariante scalare $I = \mathbf{v}_P \cdot \boldsymbol{\omega}$ non dipende dal punto P del corpo rigido.
   - Esiste una retta parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ i cui punti hanno velocità con modulo minimo.
   - La velocità di questi punti è parallela ad $\boldsymbol{\omega}$.
   - Trovare l'equazione della retta.

4. Un'asta lunga $2L$ è vincolata a giacere nel piano Oxy, ha una estremità fissa in un punto (x_0, y_0) del piano e ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\hat{\mathbf{i}}_3$. Determinare lo stato cinetico dell'asta.

5. Un'asta lunga $2L$ è vincolata a giacere nel piano Oxy e ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\hat{\mathbf{i}}_3$ intorno ad un asse passante per il suo centro. Determinare lo stato cinetico dell'asta.

6. Un corpo rigido ruota intorno ad un asse fisso $\hat{\mathbf{u}}$ con velocità angolare data da $\boldsymbol{\omega} = (3t + t^2)\hat{\mathbf{u}}$. Determinare la velocità e l'accelerazione di un punto P del corpo rigido posto a distanza d dall'asse di rotazione.

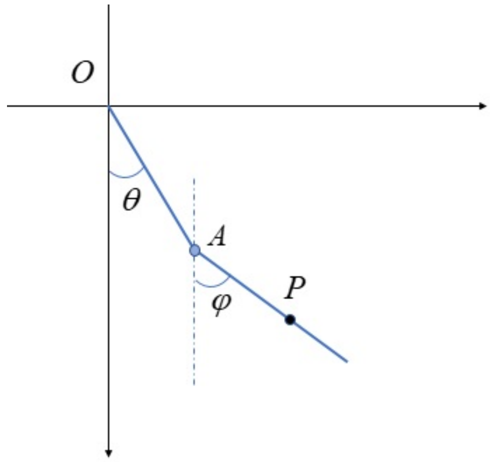

Figura 3:

7. Di un corpo rigido sono noti in un certo istante la velocità di un suo punto O' e la velcoità angolare istantanea $\boldsymbol{\omega}$. Sapendo che $\mathbf{v}_{O'} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, w)$, con w e v_3 diversi da zero, verificare che lo stato cinetico è elicoidale, scrivere l'equazione dell'asse di Mozzi e determinare la velocità di un punto appartenente a tale asse (velocità di scorrimento).

8. Due aste, ognuna lunga L, sono vincolate tra loro a formare un doppio pendolo (si veda la figura 3). Determinare la velocità di un generico punto P sulla seconda asta.

9. Un'asta AB di lunghezza L è vincolata in A a scorrere sull'asse delle x, mentre un suo punto C, a distanza b da A, è vincolato a scorrere sull'asse delle y. Determinare la traiettoria del punto B.

14/03/2020 (e-learning)

1. Un punto P si muove, di moto uniforme, lungo una retta giacente nel piano (x, y) e passante per l'origine. La retta è a sua volta uniformemente rotante intorno all'asse determinato da $\hat{\mathbf{i}}_3$. All'istante $t = 0$ il punto ha coordinate $(x_0, 0)$. Descrivere il moto assoluto e relativo (rispetto a un sistema rotante con la stessa origine di quello fisso) del punto P.

2. Un'asta AB di lunghezza L ha gli estremi vincolati a scorrere senza attrito su due guide perpendicolari. Determinare l'atto di moto ed il centro istantaneo di rotazione.

3. Un punto P è vincolato a muoversi su una parabola con la legge $P - O = (t, t^2)$. Il piano in cui giace la parabola ruota con velocità angolare ω. Al tempo $t = 0$ il sistema fisso e quello mobile coincidono. Determinare la velocità e l'accelerazione relativi ad un sistema solidale con il piano, la velocità e l'accelerazione di trascinamento del punto e l'accelerazione di Coriolis del punto.

4. Un'asta lunga $2L$ ha il centro C vincolato ad una circonferenza di raggio R. La circonferenza si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v} = v\hat{i}_1$. Al tempo $t = 0$ la circonferenza è nell'origine del sistema di riferimento. Il centro C dell'asta inoltre ruota sulla circonferenza con velocità angolare costante ω. Determinare:
   - la velocità e l'accelerazione di un punto P dell'asta a distanza s dal centro C.
   - il centro di istantanea rotazione dell'asta

5. Un punto P è mobile su una guida inclinata di un angolo θ costante rispetto alla verticale. La guida ruota uniformemente intorno a tale asse. Calcolare velocità e accelerazione del punto.

6. Un punto P è mobile su una circonferenza di raggio r. Il centro della circonferenza a sua volta è mobile su una circonferenza di raggio $R > r$ e centro nell'origine del sistema fisso. Descrivere il moto del punto.

21/03/2020 (e-learning)

1. Su un punto P di massa m agisce la forza posizionale
$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = h\left(x_2 x_3 \hat{\mathbf{i}}_1 + x_1 x_3 \hat{\mathbf{i}}_2 + x_1 x_2 \hat{\mathbf{i}}_3\right),$$
dove h è una costante. Determinare se la forza è conservativa e, nel caso affermativo, trovare il potenziale, l'energia potenziale e l'energia meccanica del punto P. Successivamente trovare il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ nello spostamento che va dal punto $(0, 0, 0)$ al punto (a, a, a) lungo due percorsi differenti: il primo sulla retta $x_1 = x_2 = x_3$, il secondo dato dall'unione dei percorsi sulla retta $x_1 = x_2 = 0$ e la retta $x_3 = a, x_1 = x_2$.

2. Dimostrare che tutte le forze centrali sono conservative e trovarne il potenziale. Determinare successivamente l'energia meccanica di un punto P in un campo di forze centrali. *Suggerimento*: si ricordi che una forza centrale agente su un punto P è data dall'espressione $\vec{F} = \frac{\rho(r)}{r}(P - O)$, dove $r = |P - O|$ e ρ è una funzione che ammette una primitiva.

3. Su un punto P di massa m agisce una forza elastica dovuta ad una molla con lunghezza a riposo pari ad ℓ e costante elastica k. Il punto inizialmente si trova sull'asse delle x a distanza x_0 dall'origine. La sua velocità iniziale è pari a $v_0\hat{\mathbf{i}}_1$. La molla collega il punto con l'origine degli assi. Determinare:
   - Il potenziale
   - l'energia meccanica
   - le equazioni differenziali del moto.
   - la soluzione delle equazioni differenziali del moto.
   - l'espressione dell'energia meccanica in termini di m, v_0, x_0 e k.

4. Un punto P è vincolato a muoversi sull'asse x_3. Su di esso agisce la forza peso ed una forza $\vec{F}$ diretta come $\hat{\mathbf{i}}_3$ e di modulo pari a $k\,(x_3)^{-2}$. Le condizioni iniziali sono date da $x(0) = \hat{\mathbf{i}}_3$, $\vec{v}(0) = v_0\hat{\mathbf{i}}_3$. Determinare
   - le equazioni differenziali del moto.
   - Il potenziale a cui è soggetto il punto.
   - l'energia meccanica del punto.
   - La quota massima e la quota minima raggiunta dal punto.
5. Calcolare la velocità minima con la quale si deve lanciare un oggetto affinchè esca dall'attrazione gravitazionale terrestre. Questa velocità dipende dalla massa dell'oggetto? Confronta successivamente il valore trovato con la velocità di entrata in atmosfera di un asteroide sulla Terra.
6. Un punto P si muove su un piano liscio. Al punto è applicata la forza $\vec{F} = 3yx^2\hat{\mathbf{i}}_1 + (x^3 + y)\hat{\mathbf{i}}_2$. Verificare che la forza è conservativa, determinarne il potenziale e calcolare il lavoro effettuato dalla forza se il punto percorre l'arco di una circonferenza di raggio $R = 2$, partendo dal punto (2,0) ed arrivando in (0,2).
7. Determinare il moto e la traiettoria di un proiettile nel vuoto soggetto alla forza peso ed ad una forza costante uguale a $-k\hat{\mathbf{i}}_1$ (k è una costante). Le condizioni iniziali sono $\vec{x}(0) = \vec{0}$ e $\vec{v}(0) = (v_1, 0, v_3)$.

28/03/2020 (e-leraning)

1. Un punto materiale P è vincolato ad un piano orizzontale liscio. Esso è soggetto, oltre alla forza peso, ad una forza elastica pari a $-k(P - O)$. Date le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (x_0, y_0)$ e $\mathbf{v}(0) = (v_1, v_2)$, determinare il moto del punto, la traiettoria e la reazione vincolare.
2. Un punto materiale P è appoggiato su un piano orizzontale liscio. Esso è soggetto, oltre alla forza peso, ad una forza elastica pari a $-k(P - A)$, dove A è un punto sull'asse $\hat{\mathbf{i}}_3$ a distanza d dall'origine. Date le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (x_0, y_0)$ e $\mathbf{v}(0) = (v_1, v_2)$, determinare il moto del punto e la reazione vincolare. Successivamente determinare il valore massimo di k per il quale non si ha il distacco del punto dal piano.
3. Un punto materiale P è appoggiato su un piano orizzontale liscio. Esso è soggetto, oltre alla forza peso, ad una forza elastica pari a $-k(P-O)$, dove O è un punto del piano ed a una forza costante pari a $F_0\hat{\mathbf{i}}_3$. Date le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (x_0, y_0)$ e $\mathbf{v}(0) = (v_1, v_2)$, determinare il moto del punto e la reazione vincolare. Successivamente determinare il valore massimo di F_0 per il quale non si ha il distacco del punto dal piano.
4. Un punto materiale P si muove su un piano inclinato liscio. Il piano ha un'inclinazione di un angolo fisso α rispetto all'orizzontale. Oltre alla forza peso, sul punto agisce una

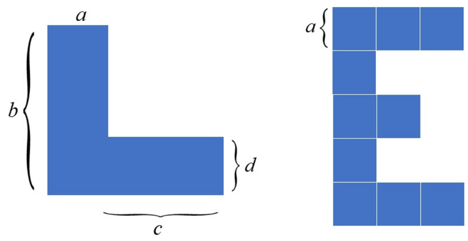

Figura 4:

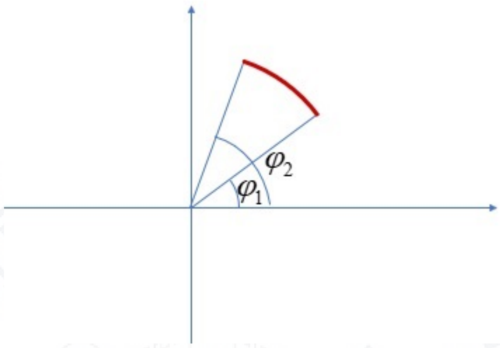

Figura 5:

forza elastica pari a $-k(P-O)$, dove O è un punto fisso sul piano inclinato. Determinare il moto del punto e la reazione vincolare.

5. Un punto P di massa m è poggiato sulla sommità di una semisfera liscia di raggio R. Esso viene messo in moto con una velocità $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{u}$, dove $\mathbf{u}$ è un versore tangente alla sfera sulla sua sommità. Determinare il punto di distacco di P ed il valore minimo da dare a v_0 affinchè il punto si stacchi immediatamente dalla sfera.

6. Un punto materiale P è vincolato ad una semicirconferenza liscia di raggio R. La circonferenza è varticale nel piano xy ed ha il diametro AB sull'asse delle x. Sul punto agisce, oltre alla forza peso, una forza costante di modulo F_0 e diretta come $P - A$. All'istante iniziale il punto è in B e viene messo in moto con velocità $v_0\hat{\mathbf{i}}_2$ dove $\hat{\mathbf{i}}_2$ è il versore dell'asse delle y e v_0 è una quantità positiva. Determinare la reazione vincolare.

04/04/2020 (e-learning)

1. Un'asta non omogenea AB di lunghezza L ha densità lineare data dalla legge $\rho = \rho_0(1+kx)$ dove x è la distanza di un punto dell'asta da uno dei suoi estremi. Determinare il baricentro dell'asta.

2. Determinare il baricentro delle lamine omogenee in figura (4)

3. Calcolare il baricentro dell'arco di circonferenza in figura (5). Successivamente esprimere

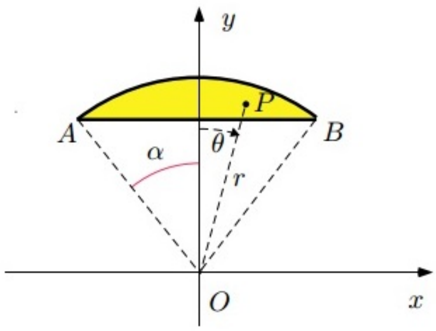

Figura 6:

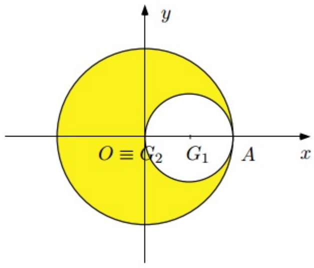

Figura 7:

il risultato in termini dell'angolo α intermedio tra φ_1 e φ_2 (introdurre gli angoli α e β tali che $\varphi_1 = \alpha - \beta$ e $\varphi_2 = \alpha + \beta$). Cosa si nota?

4. Determinare il baricentro di un settore circolare omogeneo di raggio R e apertura 2α. Introdurre il riferimento cartesiano Oxy, con origine O nel centro del cerchio a cui appartiene il settore circolare e asse y coincidente con l'asse di simmetria del settore.

5. Determinare il baricentro di un triangolo omogeneo i cui vertici, in un riferimento Oxy, hanno coordinate $(0, 0)$, $(a, 0)$, (b, c)
Suggerimento: provare a risolvere l'esercizio sia analiticamente (utilizzando la definizione di baricentro per una figura piana), che geometricamente (mostrando che il baricentro è il punto d'incontro delle mediane).

6. Determinare il baricentro di un telaio triangolare omogeneo i cui vertici, in un riferimento Oxy, hanno coordinate $(0, 0)$, $(a, 0)$, (b, c)

7. Determinare il baricentro della porzione di settore circolare omogeneo di raggio R e apertura 2α come in figura (6).

8. Determiare il baricentro di un disco omogeneo,di raggio R, con un foro circolare, di raggio $\frac{R}{2}$. Introdurre il riferimento cartesiano Oxy come in figura (7).

9. Determinare il baricentro della lamina omogenea di massa m in figura (8).

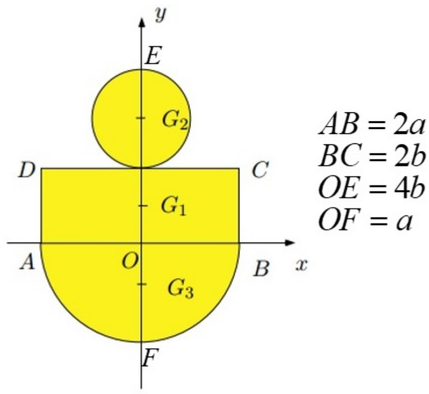

Figura 8:

11/04/2020 (e-learning)

1. Calcolare il momento d'inerzia di un'asta omogenea AB, di lunghezza L e massa m rispetto ad un asse perpendicolare all'asta e passante per il suo baricentro.

2. Calcolare il momento d'inerzia di un'asta omogenea AB, di lunghezza L e massa m rispetto ad un asse perpendicolare all'asta e passante per una sua estremità sia analiticamente che tramite il teorema di Huygens.

3. Calcolare il momento d'inerzia di un'asta omogenea AB, di lunghezza L e massa m rispetto ad un asse perpendicolare all'asta e passante a distanza r ($r < L$) da una sua estremità sia analiticamente che tramite il teorema di Huygens.

4. Determinare il momento d'inerzia di un'asta omogenea AB di lunghezza L e massa m rispetto ad
   - un asse passante per un suo estremo e formante un angolo θ con l'asta.
   - un asse passante per il baricentro e formante un angolo θ con l'asta.

5. Calcolare il momento d'inerzia di una circonferenza omogenea di raggio r e massa m rispetto ad
   - un asse perpendicolare al piano in cui giace la circonferenza e passante per il suo centro.
   - un asse perpendicolare al piano in cui giace la circonferenza e passante per un punto della circonferenza.
   - rispetto ad un asse coinciedente con un suo diametro

6. Calcolare il momento d'inerzia di una corona circolare omogenea di raggi r ed R ($R > r$) e massa m rispetto ad
   - un asse perpendicolare al piano in cui giace la corona e passante per il suo centro.
   - rispetto ad un asse coinciedente con un suo diametro

7. Calcolare il momento d'inerzia di un rettangolo omogeneo di lati a e b e massa m rispetto ad

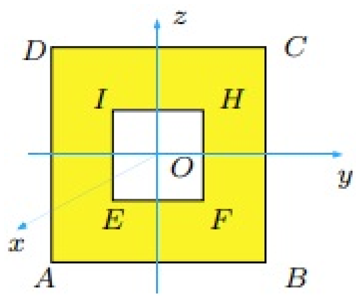

Figura 9:

- un asse perpendicolare al piano in cui giace il rettangolo e passante per il suo centro.
- rispetto ad una diagonale.

8. Calcolare il momento d'inerzia di un triangolo equilatero di massa m e lato L rispetto ad un asse giacente nello stesso piano del triangolo e passante per il baricentro.

18/04/2020 (e-learning)

1. Tre punti di massa m_1, m_2 e m_3 sono tenuti a distanza fissa da aste di massa trascurabile. In un sistema solidale le coordinate dei punti sono date rispettivamente da $(0, a, 0)$, $(0, -a, 0)$ e $(0, 0, b)$. Determinare la matrice d'inerzia del sistema e descrivere il contributo al momento di inerzia delle singole masse rispetto ad assi di rotazione diretti lungo $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$ e $\mathbf{j}_3$.

2. Determinare la matrice d'inerzia per un'asta AB omogenea di lunghezza ℓ e massa m rispetto ad un sistema solidale con l'origine nell'estremità A, con l'asta disposta lungo l'asse $\hat{j}_2$.

3. Determinare la matrice d'inerzia per un'asta AB omogenea di lunghezza ℓ e massa m rispetto ad un sistema solidale con l'origine nel centro di massa, con l'asta disposta lungo l'asse $\hat{j}_2$

4. Determinare la matrice d'inerzia di una lamina rettangolare $OABC$ rispetto ad un sistema solidale con origine nel vertice O e avente i lati $OA = a$ ed $OC = b$ rispettivamente sugli assi $\hat{j}_2$ ed $\hat{j}_3$.

5. Determinare la matrice d'inerzia di una lamina rettangolare $OABC$ rispetto ad un sistema solidale con origine nel baricentro e avente i lati $AB = a$ e $BC = b$ rispettivamente paralleli agli assi $\hat{j}_2$ ed $\hat{j}_3$.

6. Si consideri la lamina quadrata omogenea $ABCD$ in figura (9) con il foro $EFHI$. La lamina ha massa m. Si determini la matrice d'inerzia rispetto al sistema solidale $Oxyz$.

7. Determinare la matrice d'inerzia di un arco di circonferenza omogeneo AOB di apertura α rispetto ad un sistema solidale con origine nel centro della circonferenza a cui appartiene l'arco e con l'arco giacente nel piano $(\hat{j}_2, \hat{j}_3)$. Si prenda la direzione OA giacente sull'asse $\hat{j}_2$.

8. Determinare la matrice d'inerzia di un disco omogeneo rispetto ad un sistema solidale con origine nel centro del disco e con il disco giacente nel piano $(\hat{j}_1, \hat{j}_2)$.

9. Determinare la matrice d'inerzia di un disco omogeneo rispetto ad un sistema solidale con origine sul bordo del disco e con il disco giacente nel piano $(\hat{j}_1, \hat{j}_2)$. Si prenda un diametro sull'asse $\hat{j}_1$.

02/05/2020 (e-leaning)

1. Un disco omogeneo ruota intorno ad un asse fisso coincidente con un suo diametro. Il centro del disco rimane fisso sull'asse. Determinare
   - La quantità di moto totale del disco.
   - Il momento della quantità di moto totale prendendo come polo il centro del disco.
   - L'energia cinetica del disco.

2. Un disco omogeneo ruota intorno ad un asse fisso coincidente con un suo diametro. Il centro del disco si sposta con velocità costante lungo l'asse di rotazione. Determinare
   - La quantità di moto totale del disco.
   - Il momento della quantità di moto totale prendendo come polo il centro del disco.
   - L'energia cinetica del disco.

3. Risolvere lo stesso esercizio precedente supponendo che il disco ruoti intorno ad un asse fisso passante per il suo centro, con il disco perpendicolare all'asse di rotazione.

4. Un disco omogeneo di massa m e raggio R rotola senza strisciare sull'asse delle x (vedi figura (10)). Si calcoli l'energia cinetica del disco.

5. Un sistema materiale è costituito da tre aste omogenee OA, OB ed OC perpendicolari tra loro (figura 11). Il sistema è incernierato in O in modo che l'estremo C si mantenga sull'asse delle z. Il sistema ruota con velocità angolare uniforme w intorno all'asse z. Determinare
   - L'energia cinetica del sistema.
   - Il momento della quantità di moto totale rispetto al polo O.

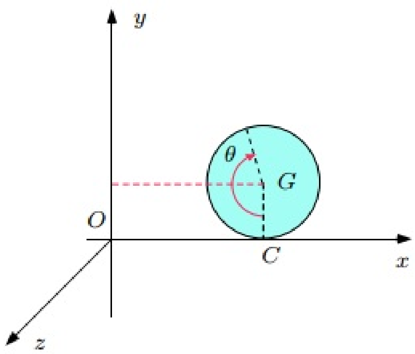

Figura 10:

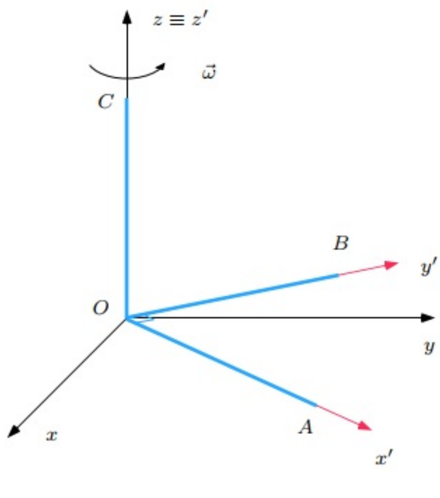

Figura 11:

6. Un'asta omogenea di massa m e lunga $2L$ ha il centro C vincolato ad una circonferenza di raggio R. Sia l'asta che la circonferenza sono vincolate sul piano $(\hat{i}_1, \hat{i}_2)$. Il centro C dell'asta ruota sulla circonferenza con velocità angolare costante ω. L'asta si tiene tangente alla circonferenza. Determinare:
   - La quantità di moto totale.
   - L'energia cinetica dell'asta.
7. Un'asta omogenea lunga $2L$ ha il centro C vincolato ad una circonferenza omogenea avente la stessa densità dell'asta e raggio R. La circonferenza si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v} = v\hat{i}_1$. Sia l'asta che la circonferenza sono vincolate sul piano $(\hat{i}_1, \hat{i}_2)$. Il centro C dell'asta inoltre ruota sulla circonferenza con velocità angolare costante ω. L'asta si tiene tangente alla circonferenza. Determinare:
   - La quantità di moto totale.
   - L'energia cinetica dell'asta.
8. Si determini l'energia cinetica di una lamina rettangolare $ABCD$, con i lati $AB = a$ e $BC = b$, vincolata al paino $(\hat{i}_1, \hat{i}_2)$ e che ruota con velocità angolare $\vec{w} = w\hat{i}_3$ intorno al punto fisso A.

09/05/2020 (e-learning)

1. In un piano Oxy, un'asta AB di lunghezza $2L$ e massa m ha l'estremo A scorrevole senza attrito sull'asse x, mentre l'estremo B è libero. Determinare
   - le equazioni del moto tramite le equazioni cardinali
   - gli integrali primi del moto
   - le posizioni di equilibrio
   - le reazioni vincolari all'equilibrio
   - le reazioni vincolari dinamiche in A.
2. In un piano verticale Oxy un disco omogeneo di raggio R e massa m ha un punto A del suo bordo scorrevole senza attrito sull'asse delle x. Determinare
   - le equazioni del moto tramite le equazioni cardinali
   - gli integrali primi del moto
   - le posizioni di equilibrio
   - le reazioni vincolari all'equilibrio
   - le reazioni vincolari dinamiche in A.

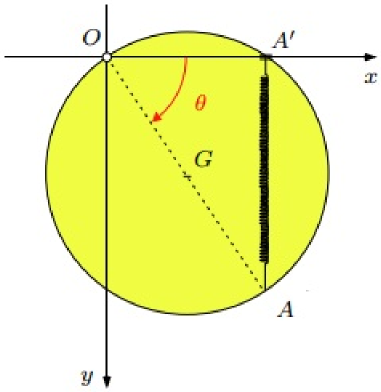

Figura 12:

3. In un piano verticale Oxy un disco omogeneo di massa m e raggio R è incerneriato in un punto del suo bordo all'origine O. Sul punto A diametralmente opposto ad O è applicata la forza elastica $\vec{F}_A = -k(A - A')$ dove A' è la proiezione di A sull'asse delle x (si veda figura (12)). Il valore di k è pari a $\frac{mg}{2R}$. I vincoli sono lisci. Determinare:
   - l'equazione differenziale del moto tramite le equazioni cardinali.
   - le posizioni di equilibrio del disco.
   - la reazione vincolare dinamica in O.
   - la reazione vincolare statica in O.
   - Un integrale primo del moto.
4. In un piano verticale Oxy si consideri un'asta AB, omogenea e pesante, di massa m e lunghezza $2L$, avente gli estremi A e B, rispettivamente, scorrevoli senza attrito sull'asse x e sull'asse y. Si chiede di determinare
   - l'equazione differenziale del moto tramite le equazioni cardinali.
   - le reazioni vincolari dinamiche in A ed in B.
   - le posizioni di equilibrio dell'asta
   - le reazioni vincolari all'equilibrio in A e in B

16/05/2020 (e-learning)

1. Un sistema articolato è composto da due aste omogenee AB e BC di massa m_1 ed m_2. Le aste sono disposte in un piano verticale Oxy e sono incernierate nei punti A, B e C, come in figura (13) (arco a 3 cerniere). Sulla cerniera in B agisce una forza costante $\vec{F}$ diretta orizzontalmente, mentre sull'asta BC agisce una coppia di momento costante $\vec{\Omega} = \Omega \hat{i}_3$. Determinare le reazioni vincolari esterne e le reazioni delle aste sulla

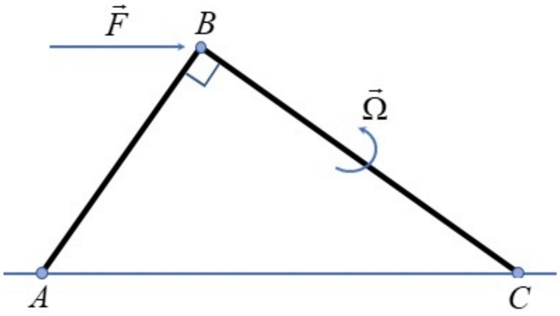

Figura 13:

cerniera in B nel caso in cui la massa m_2 sia trascurabile e le lunghezze AB ed AC siano rispettivamente ℓ e 2ℓ.

2. Determinare le equazioni del moto di un corpo rigido libero sottoposto alla sola forza di gravità. Successivamente mostrare che una rotazione stazionaria (in cui cioè la velocità angolare $\vec{w}$ è costante) è possibile, per corpi irregolari, solo se la rotazione avviene intorno ad uno dei tre assi principali d'inerzia.

3. È possibile approssimare la Terra come un corpo rigido omogeneo a forma di sferoide oblato. Lo sferoide oblato si ottiene dalla rotazione di un'ellisse di semiassi b e c intorno al suo asse verticale, di modo che la sua proiezione sul piano equatoriale è una circonferenza di raggio b, mentre la proiezione sul piano polare è un'ellisse. Sapendo che il raggio della Terra all'equatore è circa 6378Km, mentre il raggio al polo è circa 6357Km, e sapendo che nel sistema solidale $Oxyz$, dove O è il centro dello sferoide ed xy il piano equatoriale, i momenti principali d'inerzia so+no dati da $I_1 = I_2 = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2)$ ed $I_3 = \frac{2}{5}Mb^2$, determinare le rotazioni (moto di precessione) libere della Terra.

23/05/2020 (e-learning)

1. Un sistema materiale è costituito da un disco omogeno pesante che rotola senza strisciare su un piano inclinato (si veda la figura (14)). Il centro del disco è collegato tramite una molla di costante elastica k ad un punto O del piano. Trovare la configurazione di equilibrio del sistema applicando il principio dei lavori viruali.

2. Un punto materiale P di massa m è vincolato ad una circonferenza liscia ed è sollecitato da una forza elastica, come in fugura (15). Determinare:

   - le posizioni di equilibrio utilizzando il principio dei lavori virtuali.
   - le reazioni vincolari all'equilibrio.

3. In un piano verticale Oxy si consideri un'asta AB di massa m e lunghezza 2ℓ, vincolata tramite il suo estremo A a scorrere senza attrito lungo una guida inclinata di un angolo

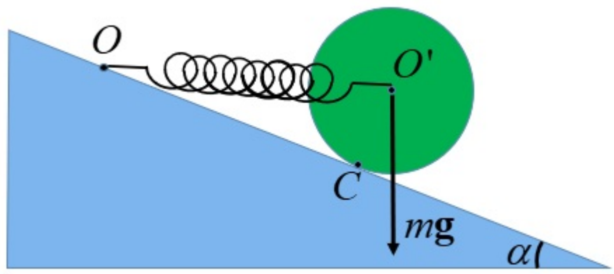

Figura 14:

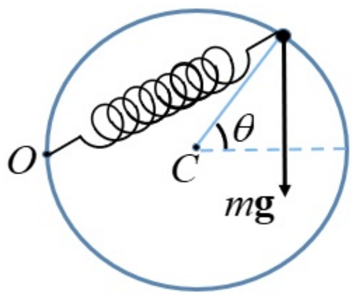

Figura 15:

α rispetto all'orizzontale. L'estremo B è libero. Sull'estremo A agisce una forza elastica $F = -k(A-O)$, dove O è un punto del piano. Trovare le forze generalizzate di Lagrange e le posizioni di equilibrio del sistema.

4. In un piano verticale Oxy si consideri un sistema materiale costituito da una lamina omogenea quadrata $OABC$, di massa M e diagonale 2ℓ, e da una punto materiale P di massa m, vincolato a scorrere senza attrito lungo la diagonale OB del quadrato (si veda figura (16)). La lamina è libera di ruotare attorno al suo vertice O. Il punto P è collegato *all'origine del riferimento* O tramite una molla di costante elastica $k = \frac{3mg}{\ell}$ con lunghezza a riposo pari a $\ell_0 = \ell/2$. Determinare:

   - le forze generalizzate di Lagrange
   - le posizioni di equilibrio ordinarie e di confine del sistema.
   - la reazione vincolare in O all'equilibrio
   - l'energia cinetica e la funzione potenziale del sistema.

30/05/2020 (e-learning)

Discussione e coorezione tema d'esame del 21/04/2020

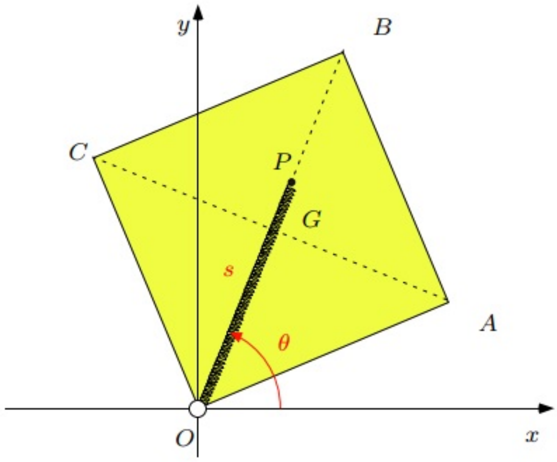

Figura 16:

05/06/2020 (e-learning)

Discussione e correzione test del 10/06/2004 (momenti d'inerzia), test del 11/04/2006 (baricentri) e tema d'esame del 15/04/2020 (potenziale, energia cinetica, equazioni del moto)