4 Variabili casuali

Nei problemi di calcolo delle probabilità si è spesso condotti a considerare delle quantità che sono funzioni del risultato di un certo fenomeno casuale.
La nozione di variabile casuale o aleatoria viene usata per descrivere gli eventi e misura i risultati di una prova, i quali possono assumere differenti valori anche quando le prove vengono eseguite sotto le stesse condizioni.
Sono esempi di variabili aleatorie: il valore numerico degli esiti del lancio di un dado, la durata della vita di una lampadina, il modulo della velocità di una molecola di un gas. Nel primo caso la variabile casuale è discreta, cioè assume un insieme finito o numerabile di valori; negli altri due casi è continua, cioè è definita su un intervallo dell'asse dei numeri reali.
DEFINIZIONE: Dato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità , definiamo VARIABILE CASUALE o ALEATORIA un' applicazione

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

tale che $\forall r \in \mathbb{R}$

$$A_r = \{w \in \Omega : X(w) \leq r\} \in \mathcal{A}$$

cioè A_r è un evento.
Una variabile casuale X è perciò una funzione di $w \in \Omega$ per la quale ha senso calcolare la probabilità:

$$P[\{w \in \Omega : X(w) \leq r\}] \quad \forall r \in \mathbb{R},$$

cioè la probabilità che X assuma valori più piccoli o uguali ad r.

$$A_r = \{w \in \Omega : X(w) \leq r\} \stackrel{\text{def}}{=} (X \leq r)$$

La variabile casuale X fa corrispondere un numero reale ad ogni esito dell'esperimento.

Esempio: Lancio di due dadi

$$\Omega = \{(i, j) = w : i = 1, ..., 6; j = 1, ..., 6\}$$

Consideriamo le seguenti variabili casuali:

- $X(w = (i, j)) = i + j$
  X assegna ad ogni lancio la somma dei punteggi dei dadi: è il punteggio ottenuto lanciando i due dadi. Quindi X è una variabile casuale che assume i valori $\{2; 3; 4; ...; 12\}$.

- $X(w = (i, j)) = |i - j|$
  X assegna ad ogni lancio il valore assoluto della differenza dei punteggi dei due dadi. Quindi X è una variabile casuale che assume i valori $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

DEFINIZIONE: Dato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità, definiamo FUNZIONE DI RIPARTIZIONE di una variabile casuale X la funzione:

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

tale che

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad F(x) = P[X \leq x] = P[\{w \in \Omega : X(w) \leq x\}]$$

Esempio: Lancio di due dadi
$X = i + j \in [2, 12]$.

$$\text{se}\, x < 2 \; (X \leq x) = \varnothing \quad P[X \leq x] = 0 \qquad F(x) = 0$$

$$\text{se}\, 2 \leq x < 3 \; (X \leq x) = \{(1, 1)\} \qquad F(x) = \frac{1}{36}$$

$$\text{se}\, 3 \leq x < 4 \; (X \leq x) = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1)\} \; F(x) = \frac{3}{36}$$

$$\vdots$$

$$\text{se}\, 11 \leq x < 12 \; (X \leq x) = \Omega \setminus \{(6, 6)\} \quad F(x) = \frac{35}{36}$$

$$\text{se}\, x \geq 12 \; (X \leq x) = \Omega \qquad F(x) = 1$$

È utile ricorrere alla forma grafica della funzione di ripartizione per verificare che essa sia una funzione monotona non decrescente definita non solo per tutti i valori assunti dalla variabile casuale, ma per l'intero asse dei numeri reali.

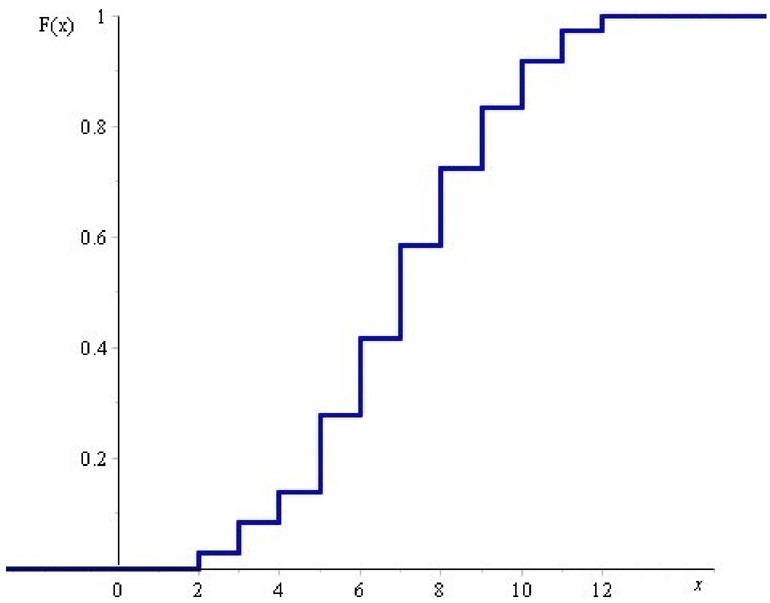

Figura 1

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE F

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
2. F è monotona non decrescente: se $x_1 < x_2 \rightarrow$ $\rightarrow F(x_1) \leq F(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

3. $P[X > x] = 1 - P[X \leq x] = 1 - F(x)$
4. F è continua a destra:
$$\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$$
5. $P[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1),\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ \ x_1 < x_2$

Per giustificare l'ultima proprietà, notiamo che

$$\{X \leq x_2\} = \{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2\}$$ unione di eventi disgiunti

$$P[X \leq x_2] = P[X \leq x_1] + P[x_1 < X \leq x_2]$$

quindi

$P[x_1 < X \leq x_2] = P[X \leq x_2] - P[X \leq x_1] =$
$= F(x_2) - F(x_1)$

Nel definire la funzione di ripartizione F non abbiamo fatto distinzione tra variabile casuale discreta e variabile casuale continua. Tale distinzione invece è necessaria quando introduciamo un'altra funzione importante chiamata funzione di densità della variabile casuale X.

DEFINIZIONE: Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e X una variabile casuale discreta. Definiamo

FUNZIONE DI DENSITÀ DISCRETA (o funzione di massa o distribuzione di probabilità) la funzione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

tale che

$$f(x) = P[X = x] = P[\{w \in \Omega : X(w) = x\}], \ \forall x \in \mathbb{R}$$

dove x è detto anche PUNTO MASSA.

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI DENSITÀ DISCRETA f

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$

OSSERVAZIONE

Assegnata la funzione di ripartizione F di una variabile casuale discreta X è possibile calcolare la funzione di densità discreta f e viceversa.

- $f(\cdot)$ nota $\Rightarrow$

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{t \leq x} f(t), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

- $F(\cdot)$ nota $\Rightarrow$

$$f(x) = F(x) - \lim_{h \to 0^+} F(x-h) = P[X = x]$$ ampiezza del salto

Esempi

1) lancio di un dado

X = numero della faccia in alto.

$f(x) = \frac{1}{6}\ , \quad x = x_k\ , \quad k = 1, ..., 6.$

se $x < 1$ $P[X \leq x] = P[\varnothing] = 0$ $\qquad F(x) = 0$

se $1 \leq x < 2$ $P[X \leq x] = \sum_{t \leq x} f(t) = f(1)$ $\qquad F(x) = \frac{1}{6}$

se $2 \leq x < 3$ $P[X \leq x] = f(1) + f(2)$ $\qquad F(x) = \frac{2}{6}$

se $3 \leq x < 4$ $P[X \leq x] = f(1) + f(2) + f(3)$ $\qquad F(x) = \frac{3}{6}$

se $4 \leq x < 5$ $P[X \leq x] = f(1) + ... + f(4)$ $\qquad F(x) = \frac{4}{6}$

se $5 \leq x < 6$ $P[X \leq x] = 1 - f(6)$ $\qquad F(x) = \frac{5}{6}$

se $x \geq 6$ $P[X \leq x] = P[\Omega] = 1$ $\qquad F(x) = 1$

La funzione di ripartizione è costante tra un punto massa e il successivo ed ha un salto costante ($\sim$ funzione di densità) nei punti massa.

Scelto $x = 2.5$, quanto vale $F(2.5)$?
$F(2.5) = \sum_{t \leq 2.5} f(t) = f(1) + f(2) = \frac{1}{3}$
Scelto $x = 3$, quanto vale $f(3)$?
$f(3) = F(3) - \lim_{h \to 0^+} F(3-h) = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$

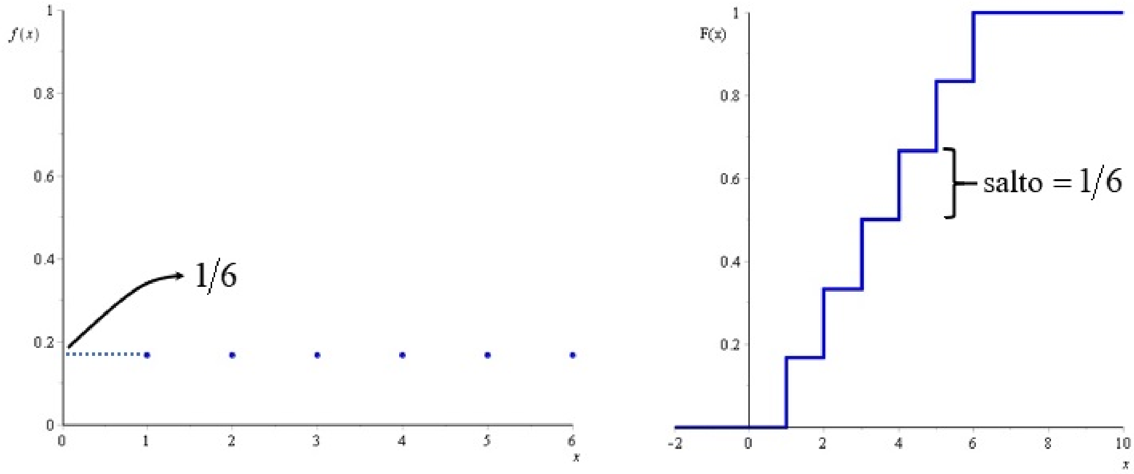

Figura 2

2) Lancio di due dadi
In questo esempio abbiamo già costruito la funzione di ripartizione, determiniamo ora la funzione di densità.

$$\text{se } x = 2 \; P[X = 2] = P[X = \{(1, 1)\}] = \frac{1}{36}$$
$$\text{se } x = 3 \; P[X = 3] = P[X = \{(1, 2); (2, 1)\}] = \frac{2}{36}$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\text{se } x = 11 \; P[X = 11] = P[X = \{(5, 6); (6, 5)\}] = \frac{2}{36}$$
$$\text{se } x = 12 \; P[X = 12] = P[X = \{(6, 6)\}] = \frac{1}{36}$$

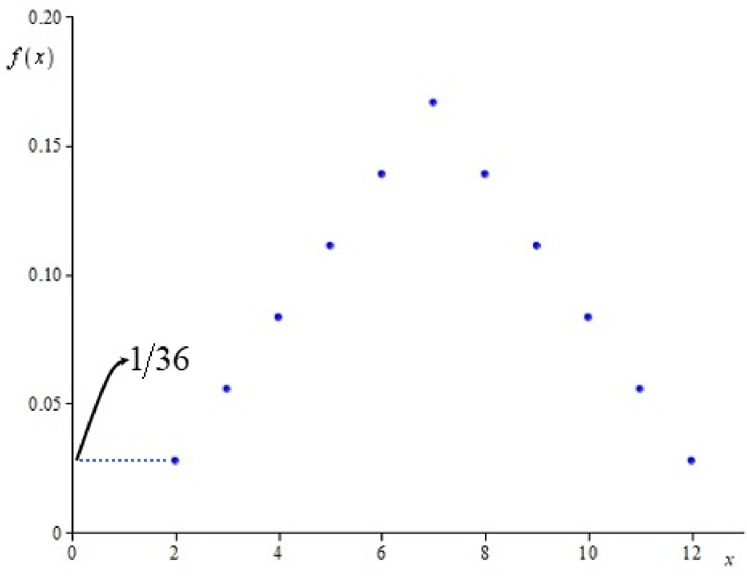

Figura 3

Per una variabile casuale X continua non ha senso calcolare la probabilità che essa sia uguale esattamente ad uno dei valori che può assumere, mentre ha senso calcolare la probabilità che la variabile casuale cada all'interno di un determinato intervallo di valori ammissibili.

DEFINIZIONE: Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità . Una variabile casuale X è detta continua se esiste una funzione

$$f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$

tale che:

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

La funzione f è detta FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONTINUA.

La funzione di ripartizione F è assolutamente continua (cioè può essere scritta come l'integrale della sua derivata).

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI DENSITÀ CONTINUA f

1. $f(x) \geq 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$ in cui è definita $F'(x)$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

COMMENTI

- $P[a < X < B] = P[a \leq X < b] =$
  $= P[a < X \leq b] = P[a \leq X \leq b]$,
  cioè non è rilevante includere o meno un estremo dell'intervallo poichè $P[X = a] = P[X = b] = 0$ (infatti se l'intervallo si riduce ad un solo punto l'integrale è nullo).

- Se invece X rappresentasse un variabile casuale discreta, avremmo $P[a < X \leq b] \neq P[a \leq X \leq b]$
  infatti
  $P[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$
  poichè
  $P[a < X \leq b] = P[-\infty < X \leq b] - P[-\infty < X \leq a] = F(b) - F(-\infty) - F(a) + F(-\infty)$
  mentre
  $P[a \leq X \leq b] = P[-\infty < X \leq b] - P[-\infty < X < a]$

ma
$P[X < a] = P[X \leq a] - P[X = a]$
quindi
$P[a < X \leq b] = F(b) - F(a) + f(a)$

- Se X è una variabile casuale discreta $P[X = x] = 0$ significa che x non è un possibile risultato per X, cioè un evento con probabilità nulla è sinonimo di evento impossibile.

- Se X è una variabile casuale continua, $f(x)$ non rappresenta la probabilità $P[X = x]$ che è sempre nulla $\forall x \in \mathbb{R}$, mentre $f(x)$ non è nulla dappertutto. Nel caso continuo è solo l'integrale della $f(x)$ su un intervallo che ha il significato di probabilità.

Esempi

1) Durata di una conversazione telefonica

La durata di una conversazione telefonica può essere descritta da una variabile casuale X avente la seguente funzione di ripartizione:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0\,, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0, \quad \underline{\lambda > 0}\,. \end{cases}$$

allora
$f(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$, mentre $f(x) = 0$ per $x < 0$, quindi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0\,, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Se la durata della conversazione è espressa in minuti, calcolare la probabilità che la conversazione duri tra i 5 ed i 10 minuti.

$$\begin{aligned} P[5 < X < 10] &= \int_5^{10} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_5^{10} \\ &= e^{-5\lambda} - e^{-10\lambda} \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} P[5 < X < 10] = F(10) - F(5) &= \\ &= \left(1 - e^{-\lambda x}\right)\Big|_{x=10} - \left(1 - e^{-\lambda x}\right)\Big|_{x=5} \\ &= -e^{-10\lambda} + e^{-5\lambda} \end{aligned}$$

Una variabile casuale continua X con funzione di densità e di ripartizione sopra definite viene detta variabile casuale esponenziale.

2) In un esperimento di laboratorio controllato, si

supponga che l'errore della temperatura di reazione, in °C, sia una variabile casuale continua X con la seguente funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} & \text{se } -1 < x < 2\,, \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

1. Verificare che $f(x)$ sia una funzione di densità.
2. Determinare la funzione di ripartizione F.
3. Calcolare $P[0 < X \leq 1]$

1. $f(x) \geq 0$
   $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3}dx = 1$, ok.
2. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$\begin{cases} \text{se } x < 1 & F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0, \\ & \\ \text{se } -1 \leq x < 2 & F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} f(t)dt, \\ & = \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3}dt = \frac{x^3+1}{9}, \\ \text{se } x \geq 2 & F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{2} f(t)dt + \\ & = + \int_{2}^{x} f(t)dt = 1, \end{cases}$$

quindi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1\,, \\ \dfrac{x^3+1}{9} & \text{se } -1 \leq x < 2\,, \\ 1 & \text{se } x \geq 2\,. \end{cases}$$

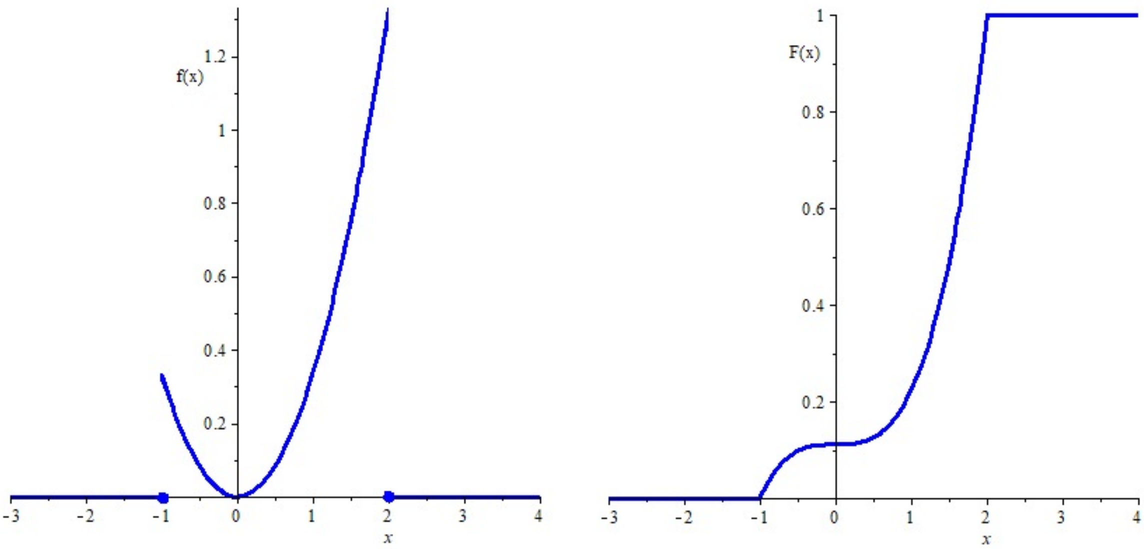

Figura 4

Per il grafico di $F(x)$, notiamo che $F(0) = 1/9$, $F'(x) \geq 0 \rightarrow$ la funzione è non decrescente, inoltre $F''(x) = \frac{2}{3}x$, quindi per $x > 0$ la concavità è verso l'alto, per $x < 0$ verso il basso. Per $x = 0$ c'è un flesso poichè $F''(x = 0) = 0$.

3. Possiamo seguire due metodi:

$$P[0 < x \leq 1] = \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx = \left. \frac{x^3}{9} \right|_0^1 = \frac{1}{9}$$

oppure

$$P[0 < x \leq 1] = F(1) - F(0) = \frac{2-1}{9} = \frac{1}{9}$$

IL VALORE ATTESO

Un importante indicatore numerico che misura la tendenza centrale di una variabile casuale X è la media o valore atteso o speranza matematica.

Il valore atteso viene calcolato utilizzando la distribuzione di probabilità.

DEFINIZIONE: Sia X una variabile casuale con distribuzione di probabilità $f(x)$. Chiamiamo VALORE ATTESO o MEDIA di X il numero μ_X o $E[X]$ definito come:

- $\mu_X = E[X] = \sum_i x_i f(x_i)$ se X è variabile casuale discreta.
- $\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ se X è variabile casuale continua.

La media, indicando dove sono "centrati" i valori di X è anche detta centro di gravità o baricentro di una densità.

OSSERVAZIONE

Per una variabile casuale discreta, $E(X)$ rappresenta la media pesata di tutti i possibili valori che X può assumere, ognuno pesato con la probabilità che lo assuma (ricorda che $f(x_i) = P[X = x_i]$).

Esempi

1) Lancio di due dadi

$X = i + j$, $i = 1, ..., 6$; $j = 1, ..., 6$. $X \in [2, 12]$

$$E[X] = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \ldots + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

(si veda anche il grafico di $f(x)$)

2) Durata di una conversazione telefonica

X è una variabile casuale continua avente funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0, \quad \lambda > 0\,, \\ 0 & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx$$

Integrando per parti $u(x) = x$, $v'(x) = -\lambda e^{-\lambda x} \to v = e^{-\lambda x}$

$$\begin{aligned} E[X] &= -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= -\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Bigg|_0^{+\infty} \\ &= 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

dove nel limite abbiamo utilizzato la regola di De l'Hôspital.

ANALOGIA CON IL BARICENTRO

Una variabile casuale discreta X può assumere i valori $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ con probabilità:

$$P[0] = 0.1;\ P[1] = 0.25;\ P[2] = 0.3;\ P[4] = 0.35$$

(Nota bene $\sum_i P[X = x_i] = 1$)

Il valore atteso di X è:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{4} x_i f(x_i) = 0\cdot 0.1 + 1\cdot 0.25 + 2\cdot 0.3 + 3\cdot 0.35 = 1.9$$

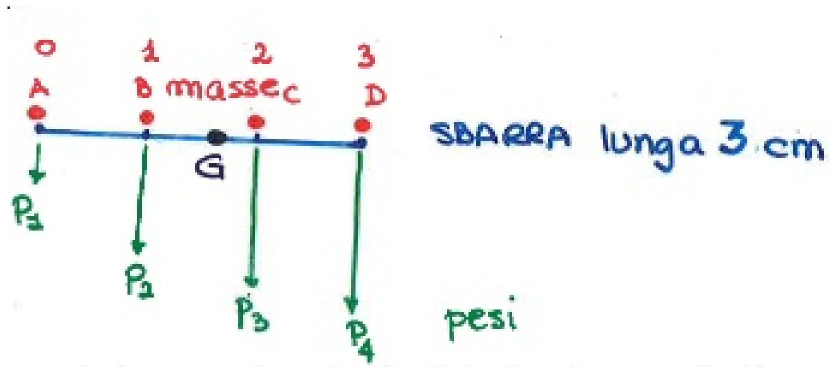

Figura 5

$\overline{AG} = x$

La coordinata del baricentro G è data dalla soluzione dell'equazione

$$xp_1 + (x-1)p_2 - (2-x)p_3 - (3-x)p_4 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underbrace{x(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)}_{=1} - p_2 - 2p_3 - 3p_4 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = p_2 + 2p_3 + 3p_4 = 1.9cm.$$

Il baricentro G è il punto in cui la sbarra rimane in equilibrio orizzontale ed è applicato il peso totale $p = 1$. $E[X]$ è il punto rispetto al quale è nulla la somma dei momenti dei pesi delle singole masse.

LA VARIANZA

Un altro indicatore numerico che è in grado di caratterizzare la variabilità della variabile casuale X attorno alla sua media $\mu_X = E[X]$ è la varianza.

DEFINIZIONE: Sia X una variabile casuale con funzione di densità $f(x)$ e media μ_X. Definiamo VARIANZA di X il numero reale positivo $\sigma_X^2 = \text{var}[X]$:

- $\sigma_X^2 = \text{var}[X] = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 f(x_i)$ se X è una variabile casuale discreta.
- $\sigma_X^2 = \text{var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x)$ se X è una variabile casuale continua.

Il numero reale positivo:

$$\sigma_X = \sqrt{\text{var}[X]}$$

è detto DEVIAZIONE STANDARD o SCARTO QUADRATICO MEDIO di X.

OSSERVAZIONE

La varianza è tanto più piccola quanto più l'insieme dei valori di x sono vicini alla media μ.

OSSERVAZIONE

Come la media rappresenta il centro di gravità o baricentro, così la varianza si può interpretare come il momento d'inerzia della densità rispetto ad un asse passante per il baricentro.

Esempi

1) Lancio di due dadi

$X = i + j, \qquad X \in [2, 12], \qquad E[X] = 7$

$$\mathrm{var}[X] = (2-7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + \ldots (12-7)^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{35}{6}$$

2) Durata di una conversazione telefonica

X è una variabile casuale continua con funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0, \quad \lambda > 0\,, \\ 0 & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{var}[X] = \int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx =$$
$$= \underbrace{\int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx}_{1} \underbrace{-2 \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx}_{2} + \underbrace{\frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx}_{3}$$

Integrando per parti l'integrale 1 con $u(x) = x^2$, $v'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$

$$1 = -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx$$

e quindi

$$1 + 2 = -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = - \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{\lambda x}} = 0$$

avendo applicato due volte la regola di De l'Hôspital. Rimane l'integrale 3:

$$\mathrm{var}[X] = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda^2}\, e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda^2}.$$