Probabilità e Statistica

Estrazioni

Marco Pietro Longhi

C.d.L.: Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni, Ingegneria Informatica
a.s. 2018/2019

Estrazioni

Supponiamo di avere un'urna che contenga n palline numerate da 1 a n.

Esperimento: estrazione di palline dall'urna (una alla volta, scelte a caso) finchè siano state estratte k palline $\Longrightarrow$ **campionamento di ampiezza** k.

Il numero totale di campioni **ordinati** e **diversi tra loro** che si ottengono estraendo k palline da un'urna che ne contiene n, fra loro distinguibili, è

a) $n^k = D^*_{n,\,k}$ se il campionamento è **con reimmissione**.

b) $\frac{n!}{(n-k)!} = D_{n,\,k}$ se il campionamento è **senza reimmissione**.

Ne segue

a) Ogni campione **ordinato** casuale di ampiezza k ha probabilità $\frac{1}{D^*_{n,\,k}}$ se l'esperimento avviene con reimmissione.

b) Ogni campione **ordinato** casuale di ampiezza k ha probabilità $\frac{1}{D_{n,\,k}}$ se l'esperimento avviene senza reimmissione.

Se l'estrazione **senza reimmissione** avviene anche **senza** tener conto **dell'ordine**, allora Il numero totale di campioni **non ordinati** e **diversi tra loro** che si ottengono estraendo k palline da un'urna che ne contiene n, fra loro distinguibili, è $C_{n,\,k}$.

Ne segue che ogni campione **non ordinato** casuale di ampiezza k, ottenuto dall'esperimento senza reimmissione, ha probabilità $\frac{1}{C_{n,\,k}}$.
Questo tipo di estrazione è anche detta **in blocco** essendo equivalente all'estrazione dall'urna di un blocco di palline.

Campione proveniente da popolazione mista

Applicazione dell'estrazione in blocco o della distribuzione di probabilità ipergeometrica: da un'urna contenente b palline bianche e r rosse se ne estraggono n, con $n \leq b + r$, senza reimmissione.
Qual è la probabilità che k di esse siano rosse?
Sia

$$A_k = \{\text{nel campione di } n \text{ palline estratte ci sono } k \text{ palline rosse}\}.$$

Si ha

$$P(A_k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$$

con $n - k \leq b$ e $k \leq r$.

Esercizio

Data un'urna contenente 11 palline numerate da 1 a 11, calcolare la probabilità che la pallina numero 8

a) appartenga ad un campione casuale ordinato di ampiezza 5 ottenuto da un'estrazione senza reimmissione.
b) appartenga ad un campione casuale non ordinato di ampiezza 5 ottenuto da un'estrazione senza reimmissione.

$\left[\frac{5}{11}, \ \frac{5}{11}\right]$

Esercizio

Da un mazzo di 52 carte vengono estratte in blocco cinque carte. Calcolare la probabilità che due carte siano due assi.

[0.03993]

Esercizio (Tema d'esame del 05/09/2006)

Ad un corso di Probabilità e Statistica sono iscritte 100 matricole, delle quali 80 hanno superato l'esame di Analisi Matematica A. Scelti a caso 4 studenti, qual è la probabilità che 3 di essi abbiano superato l'esame di Analisi Matematica A?

$$[0.4191]$$

Esercizio (Tema d'esame del 19/06/2017-C3)

Da un lotto contenente 4 pezzi difettosi e 8 buoni si estraggono in blocco 3 pezzi. Calcolare la probabilità che al massimo uno dei pezzi estratti sia difettoso, supposto che al massimo due dei pezzi estratti siano difettosi.

$$\left[\frac{7}{9}\right]$$

Esercizio (Tema d'esame del 28/08/2017-C3)

Un cassetto contiene 6 chiavi, delle quali 2 sono adatte ad aprire una serratura. Si estraggano dal cassetto in blocco 3 chiavi e se ne scelga una a caso per cercare di aprire la serratura. Calcolare la probabilità che fra le 3 chiavi estratte ve ne siano 2 adatte ad aprire la serratura sapendo che la chiave scelta a caso apre la serratura.

$$\left[\frac{2}{5}\right]$$

Esercizio (Tema d'esame del 12/01/2016-C4)

Da un'urna contenente 20 palline bianche e 10 palline nere si estraggono senza reimmissione 5 palline. Calcolare la probabilità di ottenere 3 palline bianche e 2 palline nere.

$$[0,36]$$

Esercizio (Tema d'esame del 11/06/2013-C1)

Da un gruppo di 6 uomini e 9 donne si estrae in modo casuale una commissione formata da 5 persone. Calcolare la probabilità che la commissione sia formata da 3 uomini e 2 donne.

$$\left[\frac{240}{1001}\right]$$

Esercizio (Tema d'esame del 02/07/2013-C2)

Da un'urna contenente 8 palline rosse e 4 palline bianche, si estraggono due palline senza rimpiazzo. Supponendo che ogni pallina possa essere ugualmente estratta, calcolare la probabilità che entrambe le palline estratte siano rosse.

$$\left[\frac{14}{33}\right]$$

Esercizio (Tema d'esame del 25/11/2008-C2)

In una scuola media di un piccolo paese ci sono 12 ragazzi nella classe prima, 15 nella classe seconda e 10 nella classe terza. Si vuole formare un comitato di istituto composto da 5 ragazzi scelti a caso tra tutti i ragazzi della scuola. Calcolare la probabilità che nel comitato ci siano esattamente 2 ragazzi di seconda.

[0.37096]

Esercizio (Tema d'esame del 04/07/2006)

Ad un Master in comunicazione sono iscritti 20 dirigenti d'azienda di cui 8 di madre lingua inglese. Scelti a caso 4 dirigenti iscritti al master, qual è la probabilità che 3 siano di madre lingua inglese?

[0.1387]

Esercizio (Tema d’esame del 26/08/2015)

In un armadio sono appese 11 magliette, di cui 5 polo, 2 a righe, 4 da calcio. Si scelgono a caso 4 magliette. Qual è la probabilità di scegliere 3 polo ed 1 che non sia polo?

$$\left[\frac{2}{11}\right]$$

Esercizio

Da un mazzo di 52 carte vengono estratte successivamente due carte senza che la prima carta estratta venga reinserita. Calcolare la probabilità che la somma delle due carte sia pari a 21.

$$\left[\frac{32}{663}\right]$$

Esercizio

Un'urna contiene 12 palline: 8 nere e 4 blu e da essa vengono effettuate delle estrazioni senza reimmissione.

a) Calcolare la probabilità che le prime due palline estratte siano entrambe blu.

b) Calcolare la probabilità che la seconda e la terza estratta siano entrambe blu, sapendo che la prima estratta era nera.

c) Calcolare la probabilità che la seconda e la terza estratta siano entrambe blu.

$$\left[\frac{1}{11}, \frac{6}{55}, \frac{1}{11}\right]$$

Esercizio

Un'urna contiene 90 palline numerate da 1 a 90, Marco scommette con un suo amico di riuscire ad estrarre una delle palline contrassegnata con il numero 1, 2 o 3, in cinque tentativi senza reimmissione. Per aiutare la fortuna, non visto dall'amico, aggiunge nell'urna 3 palline supplementari con i numeri 1, 2 e 3. Qual è la probabilità che il trucco di Marco venga scoperto dall'amico?

[0.007]

Esercizio (Tema d'esame del 13/12/2005)

Un'urna contiene 5 palline di cui 3 nere e 2 bianche. Si estrae una pallina e, dopo averne guardato il colore, la si rimette a posto. A questo punto si inserisce nell'urna una pallina di colore opposto a quella appena estratta.
Si determini la probabilità che alla seconda estrazione la pallina sia nera.

$\left[\frac{17}{30}\right]$

Problema delle prove ripetute

Gettiamo un dado regolare e calcoliamo la probabilità che in successivi cinque lanci la faccia 1 si presenti soltanto la prima volta e poi non si presenti più nei successivi lanci.
Siamo di fronte a un *evento prodotto* di una sequenza di cinque *eventi indipendenti*. La probabilità dell'evento

$$E = \{\text{esce la faccia } 1\} \text{ è } \; P(E) = \frac{1}{6},$$

mentre $P\left(\overline{E}\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. La probabilità richiesta è

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^5}$$

Abbandoniamo ora la richiesta che la faccia 1 esca la prima volta e consideriamo il caso in cui la faccia 1 esca una sola volta, non importa in quale posizione della sequenza. Le cinque possibilità sono tutte incompatibili tra di loro, ciascuna con ugual valore di probabilità p.

Dobbiamo applicare la regola di addizione sommando cinque volte il valore appena trovato, quindi

$$5 \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^5}{6^5}$$

Il numero delle volte che si può presentare la sequenza è uguale al numero di permutazioni di 5 elementi di cui 1 ripetuto una volta e l'altro (gli altri numeri $\neq 1$ che occupano i rimanenti 4 posti) ripetuto quattro volte o equivalentemente al numero dei modi con cui un elemento può occupare cinque posti a disposizione. Infatti

$$P^*_{1,4} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \binom{5}{1}$$

Generalizziamo il problema.
Se abbiamo un evento E con probabilità costante p di verificarsi e vogliamo calcolare la probabilità che l'evento E si verifichi k volte in n prove indipendenti.
L'evento costante $\overline{E}$ ha probabilità di verificarsi $q = 1 - p$.

Se fissiamo l'ordine delle k volte che l'evento si deve verificare, la probabilità richiesta è

$$p^k \cdot q^{n-k}$$

Se non ci interessa l'ordine, dobbiamo applicare la regola di addizione e quindi moltiplicare il valore precedente per il numero dei modi in cui si possono scegliere k oggetti tra n, quindi la probabilità richiesta è

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Tale distribuzione di probabilità è detta **binomiale**, se $n = 1$ di **Bernoulli**. Indichiamo con

$$B_k = \{\text{si verificano esattamente } k \text{ eventi tra gli } n \text{ dati}\}, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

Allora

$$\sum_{k=0}^{n} P(B_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = 1$$

Equivalentemente, sia $\{e_1, e_2, \cdots e_N\}$ una popolazione, ovvero un insieme finito di N elementi, supponiamo che gli elementi della popolazione abbiano due caratteristiche distinte in proporzione rispettivamente p e q. Si estrae dalla popolazione n volte, con *reimmissione*.
Ponendo

$$E_k = \{\text{escono esattamente } k \text{ elementi con la prima caratteristica in } n \text{ estrazioni}\}$$

con $k = 0, 1, \cdots, n$.
Si ha

$$P(E_k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad k = 0, 1, \cdots n$$

Esercizio (Esercizio tipo tema d'esame 10/01/2006)

Si lanciano contemporaneamente due dadi per 7 volte. Calcolare la probabilità che

1. la somma dei punteggi delle due facce rivolte verso l'alto risulti 4 o un suo multiplo esattamente per 2 volte;
2. la somma dei punteggi delle due facce rivolte verso l'alto risulti 4 o un suo multiplo almeno per 2 volte.

[0.3115, 0.555]

Esercizio

Un'urna contiene 25 palline, di cui 10 rosse e 15 bianche. Si estrae per 6 volte una pallina, rimettendo ogni volta la pallina nell'urna. Calcolare la probabilità di estrarre per 3 volte una pallina rossa.

[0.2765]

Esercizio (Tema d'esame 24/03/2009-C3)

La probabilità che Marco vinca una partita a tennis contro Luca è 0.3. Qual è la probabilità che su cinque partite Marco ne vinca almeno due?

[0.47178]

Esercizio (Tema d'esame 19/12/2006-C3)

Ad uno studente viene dato un questionario di 9 domande alle quali deve rispondere solo con un Sì o con un No. Lo studente, preso dal panico, decide di rispondere Sì se nel lancio di un dado non truccato esce 1 oppure 6 e No negli altri casi. Calcolare la probabilità che alle 9 domande risponda almeno 7 volte Sì.

[0.008281]

Esercizio

In una scatola sono contenute 20 lampadine di cui 5 guaste. Calcolare la probabilità che in una successione di estrazioni indipendenti e ripetute:

1. la prima lampadina guasta estratta si abbia alla sesta estrazione;
2. la prima lampadina guasta estratta si abbia dopo diciotto estrazioni.

[0.059, 0.0056]

Esercizio (Tema d'esame del 03/09/2008-C2)

Un'urna contiene 3 palline rosse e 4 palline blu. Si estraggono 2 palline e, dopo averne guardato il colore, si reinseriscono nell'urna. Calcolare la probabilità di estrarre 1 pallina rossa e 1 pallina blu per la prima volta al terzo tentativo.

$\left[\frac{36}{343}\right]$

Esercizio (Tema d'esame del 10/01/2006)

Un pescatore si reca a pescare solamente in due zone: zona A e zona B. Egli ha probabilità $\frac{2}{5}$ di scegliere la zona A e $\frac{3}{5}$ di scegliere la zona B. In A il pescatore ha probabilità $\frac{1}{5}$ di catturare un pesce ogni volta che getta l'amo, in B, invece, $\frac{1}{2}$. Sapendo che il pescatore ha fatto 3 tentativi indipendenti senza riuscire a pescare un pesce, calcolare la probabilità che stia pescando nella zona B.

[0.268]

Esercizio (Tema d'esame del 25/07/2006)

Una famiglia ha 6 figli. Nell'ipotesi che la nascita di un figlio maschio abbia la stessa probabilità della nascita di una figlia femmina, determinare la probabilità che, scelti a caso 3 figli, almeno 1 sia maschio.

$\left[\frac{7}{8}\right]$

Esercizio (Tema d'esame del 05/09/2006)

Nella fase finale dei campionati del mondo, Italia e Francia si affrontano in uno scontro ad eliminazione diretta. Persistendo il risultato di parità $(0-0)$ fino alla fine del secondo tempo supplementare, le due squadre procedono alla routine dei calci di rigore. Sapendo che ogni giocatore francese ha probabilità $0,8$ di segnare, mentre ogni giocatore italiano ha probabilità $0,6$ di segnare, calcolare la probabilità che, dopo due tiri dal dischetto effettuati da ogni squadra, il risultato sia

a) 0 -0;

b) 1 - 1;

c) 2 - 2;

d) in parità.

[0.0064, 0.1536, 0.2304, 0.3904]

Esercizio (Tema d'esame del 19/04/2011-C4)

Calcolare la probabilità che effettuando 4 estrazioni con reimmissione da un'urna contenente 20 palline bianche e 30 nere, venga estratta per tre volte una pallina bianca?

$$\left[\frac{96}{625} = 0,1536\right]$$

Esercizio (Tema d'esame del 23/06/2014-E2)

L'urna A contiene 10 palline bianche e 10 nere. L'urna B contiene 5 palline bianche e 15 nere. Viene lanciata una moneta non truccata. Se esce testa vengono fatte 3 estrazioni senza reimmissione dall'urna A, altrimenti vengono fatte 3 estrazioni con reimmissione dall'urna B. Si chiede di calcolare:

1. la probabilità che vengano estratte esattamente 2 palline bianche;
2. la probabilità che sia uscita testa, sapendo che sono state estratte esattamente 2 palline bianche;
3. la probabilità che venga estratta almeno una pallina nera, sapendo che è uscita testa.

$$\left[\frac{651}{2432} = 0,26768;\ \frac{160}{217} = 0,73733;\ \frac{17}{19} = 0,89474\right]$$

Circuiti in serie o parallelo

- Macchinari con componenti collegati in serie:
  $\{$ il funzionamento dei macchinari$\}$ è uguale all'intersezione degli eventi funzionamento dei singoli componenti.
- Macchinari con componenti collegati in parallelo:
  $\{$ il funzionamento dei macchinari$\}$ è uguale all'unione degli eventi funzionamento dei singoli componenti.

Esercizio

Marco compra una serie di 20 lampadine per addobbare un albero di Natale. Calcolare la probabilità che dopo 150 ore, l'albero sia ancora illuminato, sapendo che le lampadine hanno la stessa probabilità pari a $\frac{1}{3}$ di funzionare ancora indipendentemente tra loro dopo 150 ore.

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right]$$

Esercizio

Calcolare la probabilità che una stanza per conferenze con 20 lampadine sia illuminata, supponendo che tali lampadine, dopo un dato periodo di funzionamento, abbiano tutte la stessa probabilità pari a $\frac{1}{3}$ di funzionare ancora indipendentemente tra loro.

[0.9997]