# Appunti di Meccanica Razionale

Federico Zullo

DICATAM, Università di Brescia

Indirizzo: via Valotti 9 (piano terra), 25133 Brescia.

Email: federico.zullo@unibs.it

federico-zullo.unibs.it

<u>NOTA BENE:</u> *Questo materiale è un quaderno delle lezioni: non sostituisce le lezioni, nè le esrcitazioni, nè quanto presente nei testi consigliati. Esso va inteso quindi come un ulteriore aiuto allo studio e come un approfondimento e completamento per un'adeguata preparazione all'esame.*

## Introduzione.

Cos'è la Meccanica Razionale? Perché è importante? Cosa viene affrontato in questo corso? Data la vastità della materia, è difficile condensare una risposta appropriata in poche righe. Il corso può essere considerato di "cerniera", che raccorda in maniera naturale gli insegnamenti di tipo matematico, come algebra ed analisi, con quelli di tipo fisico-ingegneristico, come può essere Scienza delle Costruzioni per ingegneri edili-architetti. Uno degli scopi principali della Meccanica Razionale è di trasmettere un *metodo* per costruire, in maniera logico-deduttiva, un modello matematico di un fenomeno fisico. In particolare la Meccanica Razionale guarda a quei fenomeni fisici che rientrano nella disciplina "Meccanica", cioè la teoria fisica che studia il movimento. Si noti bene che, come vedremo in seguito, sotto la nozione di movimento rientra anche quella di quiete e quindi di equilibrio o statica, nozioni anch'esse fondamentali per l'ingegneria edile-architettura. Per quale motivo siamo interessati alla costruzione di un modello matematico di un fenomeno fisico? A parte gli scopi teorici e la comprensione teorica della realtà, ci sono scopi pratici cruciali per un ingegnere: simulazione di un fenomeno, progettazione di strutture o macchine, predizione di comportamenti critici o effetti fisici, studio dell'evoluzione e caratterizzazione del fenomeno studiato. La metodologia proposta dalla Meccanica Razionale si basa su pochi Principi Fondamentali: questi principi non verranno dati immediatamente, altrimenti risulterebbero vuoti. Piuttosto, viene proposto un percorso alla loro scoperta e solo verso la fine del corso si riuscirà ad intuire la sintesi e la sistemazione rigorosa che la disciplina dà alla Meccanica. Questa sistematizzazione rigorosa è anche il motivo per il quale la Meccanica Razionale ha applicazioni in molte delle scienze che ci sono oggi: ingegneria meccanica, ingegneria edile-architettura, ingegneria navale, acustica, astronomia, fisica, ingegneria idraulica ecc. La valenza culturale della disciplina è quindi enorme per ogni ingegnere, mentre, dal punto di vista pratico, la disciplina vuole aiutare nello sviluppo dell'abilità ad analizzare problemi e ad applicare i principi per risolvere problemi concreti.

# 1 CINEMATICA

## 1.1 Cinematica del punto

La cinematica si propone di descrivere il moto di un corpo prescindendo dalle cause che hanno generato il movimento. Si presuppone che le nozioni primitive di spazio e di tempo siano note. Dapprima considereremo la cinematica del punto, pensato come schematizzazione elementare di un corpo.
Conoscere il moto di un punto equivale a conoscere in ogni istante il suo vettore posizione $P - O$, dove $O$ è l'origine di un sistema fisso di riferimento di assi cartesiani $Oxyz$ con assi paralleli alla terna destra $(\hat{\boldsymbol{\imath}}_1, \hat{\boldsymbol{\imath}}_2, \hat{\boldsymbol{\imath}}_3)$. Il punto $P - O$ è quindi descritto da una funzione vettoriale del tempo

$$P - O = \mathbf{x}(t) = x(t)\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + y(t)\hat{\boldsymbol{\imath}}_2 + z(t)\hat{\boldsymbol{\imath}}_3$$

oppure tramite le relative componenti
$x_1 = x(t)$, $x_2 = y(t)$, $x_3 = z(t)$.

Supporremo sempre che le funzioni $x_i$, $i = 1, 2, 3$ siano almeno di classe $C^2$. Abbiamo già visto, nella parte dedicata ai vettori ed ai vettori applicati, come

la legge oraria $P - O = \mathbf{x}(t)$ definisce, dal punto di vista geometrico, una *curva*. Dato un intervallo di tempo $I = (t_1, t_2)$, l'immagine di questo intervallo determina una *traiettoria*. La traiettoria è descritta in maniera naturale dall'ascissa curvilinea e da questa abbiamo visto come discendono le nozioni di velocità, velocità scalare, accelerazione tangenziale e centripeta.
Adesso invece passeremo a considerare i moti piani.

## MOTI PIANI

Consideriamo un punto la cui traiettoria giace su un piano invariabile rispetto all'osservatore.
- Introduciamo un sistema di coordinate polari $(\rho, \theta)$
- Il moto di $P$ è descritto da $P - O = (\rho(t), \theta(t))$
- La traiettoria la si ottiene eliminando la variabile temporale $\Rightarrow \rho = \hat{\rho}(\theta)$
- Sia $\mathbf{r}$ =vers$(P - O)$. Quindi $P - O = \rho\mathbf{r}$
- $\mathbf{r}$ è collegato solo alla variabile angolare $\theta$:
$\mathbf{r} = (\cos(\theta)\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + \sin(\theta)\hat{\boldsymbol{\imath}}_2)$
- Un versore ortogonale a $\mathbf{r}$ lo si ottiene derivando $\mathbf{r}$

rispetto a $\theta \Rightarrow$

$$\mathbf{h} \doteq \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = (-\sin(\theta)\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + \cos(\theta)\hat{\boldsymbol{\imath}}_2)$$

I versori $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{h}$ formano una base nel piano e sono quindi sufficienti a descrivere il moto del punto. In effetti troviamo subito al velocità e l'accelerazione del punto. Infatti

$$\mathbf{v} = \frac{d(P-O)}{dt} = \dot{\rho}\mathbf{r} + \rho\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\rho}\mathbf{r} + \rho\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\rho}\mathbf{r} + \rho\dot{\theta}\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}$$

da cui

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{r} + \rho\dot{\theta}\mathbf{h}}$$

Si definisce:
$\mathbf{v}_\rho = \dot{\rho}\mathbf{r}$ = velocità radiale
$\mathbf{v}_\theta = \rho\dot{\theta}\mathbf{h}$ = velocità trasversa

Per l'accelerazione notiamo dapprima che $\frac{d\mathbf{h}}{d\theta} = -\mathbf{r}$. Pertanto $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\rho}\mathbf{r} + \dot{\rho}\dot{\theta}\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\mathbf{h} + \rho\ddot{\theta}\mathbf{h} + \rho\dot{\theta}^2\frac{d\mathbf{h}}{d\theta}$ da cui

$$\boxed{\mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\mathbf{r} + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\mathbf{h}}$$

Si definisce:
$\mathbf{a}_\rho = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\mathbf{r}$ = accelerazione radiale
$\mathbf{a}_\theta = \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\mathbf{h}$ = accelerazione trasversa

Nei moti piani è utile introdurre una grandezza che misura l'area spazzata dal raggio vettore durante il moto: la velocità areale o areolare. Nel tempo $\Delta t$, il vettore $P-O$ si sposta da $P(t)-O$ a $P(t+\Delta t)-O$ e il raggio vettore spazza un'area pari a

$$\Delta A = \frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta + O((\Delta\theta)^2)$$

il limite $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}$ è chiamata velocità areale.

**DEFINIZIONE**

La velocità areale del punto $P$ rispetto al polo $O$ è data dalla quantità

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}$$

L'accelerazione areale si ottiene derivando rispetto al tempo.

DEFINIZIONE

L'accelerazione areale del punto $P$ rispetto al polo $O$ è data dalla quantità

$$\ddot{A}(t) = \frac{1}{2}\rho^2\ddot{\theta} + \rho\dot{\rho}\dot{\theta}$$

Notiamo che il modulo dell'accelerazione trasversa e l'accelerazione areale sono proporzionali, infatti

$$\ddot{A} = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{a}_\theta|$$

Questa osservazione ci sarà utile nello studio dei moti centrali

## MOTI CENTRALI

Diamo prima la definizione di moto centrale:

DEFINIZIONE

Il moto di un punto $P$ è detto centrale se il vettore accelerazione è sempre parallelo al vettore $P-O$ o è nullo, dove $O$ è un punto fisso chiamato *centro* del moto.

Per un moto centrale
- $\mathbf{a} \wedge (P - O) = \mathbf{0} \Rightarrow$
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \wedge (P - O)) = \mathbf{0} \Rightarrow$
- $\mathbf{v} \wedge (P - O) = \mathbf{k}$ con $\mathbf{k}$ costante.

Ci sono 2 possibilità: 1) $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, 2) $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$.

- 1) $\mathbf{k} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} \wedge (P - O) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}$, $P - O$ ed $\mathbf{a}$ sono paralleli (l'accelerazione normale è zero) $\Rightarrow$ il moto avviene su una retta oppure il punto è in quiete.
-2) $\mathbf{k} \neq \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{v} \wedge (P - O)) \cdot (P - O) = \mathbf{k} \cdot (P - O) = 0$. Quindi $P - O$ è $\perp$ ad un vettore costante $\forall t \Rightarrow$ il moto è piano (il piano passa per $O$ ed è $\perp$ a $\mathbf{k}$.

Possiamo allora affermare che un moto centrale è piano e si possono utilizzare le formule per i moti piani. In particolare, dall'osservazione fatta dopo l'accelerazione areale segue che

> In ogni moto centrale l'accelerazione areale è nulla e la velocità areale è costante.

È facile anche mostrare che se un moto piano ha accelerazione areale nulla, allora esso è centrale. Infatti in questo caso avremmo $\mathbf{a}_\theta = \mathbf{0}$ e quindi $\mathbf{a} /\!/ (P - O)$

## VINCOLI E SISTEMI OLONOMI

Consideriamo un sistema materiale $\mathcal{B}$ formato da un numero finito o infinito di punti materiali $P_1, P_2, \ldots$. Sia $\mathbf{x}_i = P_i - O$ il vettore posizione dell'$i$-esimo punto $P_i$ rispetto ad un sistema di riferimento $Oxyz$.

Un sistema materiale $\mathcal{B}$ è detto

– libero quando i punti di $\mathcal{B}$ possono assumere una qualsiasi posizione nello spazio.

– vincolato quando non è libero.

**DEFINIZIONE**

Un vincolo è un qualsiasi dispositivo che

– limita le velocità e le posizioni dei punti del sistema materiale.

– È esprimibile tramite una relazione analitica tra il tempo, le posizioni e le velocità di $\mathcal{B}$:

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \ldots, t) \geq 0 \qquad (1)$$

## Esempi di vincoli

Un punto materiale $P - O = \mathbf{x}$ *poggiato* sul piano $Oxy$ è un esempio di sistema vincolato rappresentato dalla relazione

$$x_3 \geq 0$$

Un punto materiale che si muove su una guida circolare di raggio $R$ è un sistema vincolato. In questo caso il vincolo si esprime con la relazione

$$(P - O)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

**CORPO RIGIDO**

Un corpo rigido è un sistema materiale per il quale la mutua distanza fra i punti rimane invariata nel tempo:

$$|P_i - P_k| = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k| = d_{ik} \quad \text{con} \quad \frac{d}{dt}(d_{ik}) = 0.$$

Una classificazione dei possibili tipi di vincolo risulterà molto utile nello studio dei sistemi vincolti. Diamo quindi alcune definizioni.

**DEFINIZIONE**

Un vincolo è detto

- bilaterale quando le relazioni (1) sono esprimibili solo tramite equazioni.
- unilaterale quando le relazioni (1) sono esprimibili tramite *almeno* una disuguaglianza.

Il primo e secondo esempio precedenti sono esempi rispettivamente di vincoli unilaterale e bilaterale.

**DEFINIZIONE**

Un vincolo è detto

- scleronomo quando le relazioni (1) non contengono esplicitamente il tempo.
- reonomo altrimenti.

Un punto vincolato a muoversi lungo una guida circolare di raggio $R$ fissa o lunga una guida circolare di raggio $R(t)$ variabile nel tempo sono esempi rispettivamente di vincoli scleronomo e reonomo.

**DEFINIZIONE**

Un vincolo è detto

- olonomo se le relazioni (1) non contengono le velocità (limita direttamente le posizioni)
- anolonomo se nelle relazioni (1) compaiono anche le velocità (limita anche le velocità)

Un vincolo olonomo è quindi esprimibile tramite relazioni del tipo

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n, t) \geq 0$$

mentre un vincolo olonomo bilaterale da

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n, t) = 0$$

Tutti gli esempi precedenti sono esempi di vincoli olonomi, mentre un esempio di vincolo anolonomo è dato dal rotolamento senza strisciamento di una sfera o un disco su un piano.

Infine, più avanti, dopo aver introdotto il concetto di forza, vedremo che è necessario distinguere anche tra vincoli lisci e vincoli scabri.

## SISTEMI OLONOMI

Un sistema materiale è detto olonomo se

- i suoi eventuali vincoli sono tutti olonomi
- le sue configurazioni sono individuate da un numero $N$ di parametri $q_1, ..., q_N$, chiamati coordinate lagrangiane. Il numero $N$ è chiamato numero di gradi di libertà del sistema .

Esempi

- Un punto materiale libero è un sistema olonomo con 3 gradi di libertà.
- Un sistema di $n$ punti materiali liberi è un sistema olonomo con $3n$ gradi di libertà.
- Un punto vincolato a muoversi su un piano è un sistema olonomo a 2 gradi di libertà.

Supponiamo, in generale, che un sistema formato da $n$ punti $\mathbf{x}_i$, $i = 1, ..., n$, sia soggetto a $r < 3n$ vincoli olonomi bilaterali $\psi_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\mathbf{x}_n, t) = 0$, $j = 1, ..., r$ e $p$ vincoli unilaterali $\psi_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\mathbf{x}_n, t) \geq 0$, $k = 1, ..., p$.

Le $r$ relazioni dei vincoli bilateri possono essere utilizzate per esprimere $r$ fra le $3n$ coordinate di $\mathbf{x}_i$ in termini delle restanti $3n - r$: il numero di coordinate che occorrono per conoscere lo stato cinetico del sistema è allora $N = 3n - r$ che rappresenta anche il numero dei gradi di libertà del sistema.

Nota bene 1): le $p$ disuguaglianze espressa dai vincoli unilaterali non sono in grado di diminuire il numero di gradi di libertà del sistema, che rimane $N = 3n - r$: ad esempio, il numero di gradi di libertà per un punto che si muove all'interno di una scatola, e quindi soggetto a soli vincoli unilaterali, è pari a 3.

Nota bene 2): la scelta delle coordinate lagrangiane non è univoca e nemmeno si è obbligati a sceglierle fra le coordinate $\mathbf{x}_i$ del sistema: in effetti molto spesso si scelgono delle variabili che sono legate alle coordinate cartesiane tramite leggi di trasformazione regolare. È però vero che alcune scelte sono più vantaggiose di altre.

## CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI

Un corpo rigido libero (cioè sottoposto ai soli vincoli di rigidità) è un esempio di sistema vincolato olonomo.

- Stabiliamo un sistema di riferimento fisso $Oxyz$, i cui versori degli assi sono $\hat{\boldsymbol{\imath}}_1, \hat{\boldsymbol{\imath}}_2, \hat{\boldsymbol{\imath}}_3$.
- Un sistema di riferimento $O'x'y'z'$ solidale con il corpo rigido, i cui versori sono $\hat{\boldsymbol{\jmath}}_1, \hat{\boldsymbol{\jmath}}_2, \hat{\boldsymbol{\jmath}}_3$.
- Nel sistema $Oxyz$, chiamiamo $(c_1, c_2, c_3)$ le coordinate di $O'$
- Siano poi $(x_1, x_2, x_3)$ ed $(y_1, y_2, y_3)$ rispettivamente le coordinate di un punto $P$ del corpo nel sistema $Oxyz$ ed $O'x'y'z'$.
- $P - O = P - O' + O' - O \Rightarrow$

$$P - O = \sum_{k=1}^{3} x_k \hat{\boldsymbol{\imath}}_k = \sum_{k=1}^{3} y_k \hat{\boldsymbol{\jmath}}_k + \sum_{k=1}^{3} c_k \hat{\boldsymbol{\imath}}_k \qquad (2)$$

Possiamo introdurre i coseni direttori della terna $\hat{\boldsymbol{\jmath}}_1, \hat{\boldsymbol{\jmath}}_2, \hat{\boldsymbol{\jmath}}_3$ rispetto alla terna $\hat{\boldsymbol{\imath}}_1, \hat{\boldsymbol{\imath}}_2, \hat{\boldsymbol{\imath}}_3$:

$$\alpha_{hk} = \hat{\boldsymbol{\imath}}_h \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}}_k, \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{\jmath}}_k = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{hk} \hat{\boldsymbol{\imath}}_h \qquad (3)$$

Moltiplicando scalarmente l'equazione (2) per $\hat{\boldsymbol{\imath}}_n$

$$x_n(t) = c_n(t) + \sum_{k=1}^{3} \alpha_{nk}(t) y_k, \qquad n = 1, 2, 3.$$

Una volta note le coordinate dell'origine $O'$ ed i coseni direttori $\alpha_{nk}$, il moto di qualsiasi punto $P$ del corpo rigido (e quindi di tutto il corpo) è determinata.

OSSERVAZIONE 1)

Dalla relazione (3) si può mostrare che i 9 coseni direttori $\alpha_{hk}$, $h = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$ in realtà soddisfano 6 vincoli. Bastano allora 3 parametri per esprimerli in maniera completa.

Esercizio: giustificare l'osservazione precedente.

OSSERVAZIONE 2)

Dall' osservazione 1) segue che un corpo rigido ha 6 gradi di libertà.

Esercizio: giustificare l'osservazione precedente.

## FORMULE DI POISSON

La dipendenza temporale dei coseni direttori è ereditata dalla dipendenza temporale della terna solidale $\hat{\boldsymbol{\jmath}}_1, \hat{\boldsymbol{\jmath}}_2, \hat{\boldsymbol{\jmath}}_3$. Per questa valgono le seguenti importanti formule:

**FORMULE DI POISSON**

Se $\hat{\boldsymbol{\jmath}}_1, \hat{\boldsymbol{\jmath}}_2, \hat{\boldsymbol{\jmath}}_3$ è una terna di versori ortogonali variabili con il tempo $t$ allora esiste un *unico* vettore $\mathbf{w}$, funzione di $t$, tale che

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\jmath}}_n(t)}{dt} = \mathbf{w}(t) \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}_n(t), \qquad n = 1, 2, 3$$

**OSSERVAZIONE**

- Il vettore $\mathbf{w}$ non dipende dalla base solidale scelta e nemmeno dalla sua origine $O'$. È legato solo alla rotazione del corpo rigido, non alla traslazione. Esso è chiamato velocità angolare del corpo rigido.

<u>Esercizio</u>: mostrare che, data la terna solidale $\hat{\boldsymbol{\jmath}}_1, \hat{\boldsymbol{\jmath}}_2, \hat{\boldsymbol{\jmath}}_3$, il vettore $\mathbf{w}$ è dato da $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} \hat{\boldsymbol{\jmath}}_k \wedge \frac{d\hat{\boldsymbol{\jmath}}_k}{dt}$

## PARTICOLARI MOTO RIGIDI

### MOTO TRASLATORIO

Il moto traslatorio di un corpo rigido è un moto in cui la terna solidale al corpo si mantiene *invariabile* rispetto alla terna fissa $\Rightarrow \alpha_{hk}$ sono costanti nel tempo.

Per un corpo rigido in moto traslatorio:
- $x_n(t) = c_n(t) + \sum_{k=1}^{3} \alpha_{nk} y_k, \qquad n = 1, 2, 3.$
- $\dot{x}_n = \dot{c}_n \qquad \ddot{x}_n = \ddot{c}_n \qquad \forall n$ - $\Rightarrow$ Tutti i punti di un corpo rigido in moto traslatoria hanno la stessa velocità (detta velocità di traslazione) e la stessa accelerazione.
- Vale il viceversa
- Se $O$ è un punto di riferimento sul rigido, allora $\forall P$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O, \qquad \mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O.$$

- Lo spostamento elementare del punto $P$ è dato da

$$dP = \mathbf{v}_O dt = dO$$

- Il moto di traslazione è detto di traslazione rettilinea se il moto del rigido e rettilineo.

## MOTO ROTATORIO

Il moto di un corpo rigido è detto rotatorio o di rotazione se esiste una retta solidale con il corpo i cui punti rimangono fissi, cioè hanno velocità nulla. Tale retta è detta asse di rotazione.

- Scegliamo due punti del rigido $O$ ed $O'$ appartenenti all'asse di rotazione.
- Scegliamo la terna fissa con origine in $O$ e asse $z$ diretto come $O - O'$.
- Sia $\phi$ l'angolo $\widehat{xx'}$. - I coseni direttori $\alpha_{hk}$ corrispondono agli elementi della seguente matrice

$$(\alpha)_{hk} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Il moto di un punto arbitrario $P$ del corpo rigido è dato da

$$x_1(t) = \cos(\phi(t))y_1 - \sin(\phi(t))y_2$$
$$x_2(t) = \sin(\phi(t))y_1 + \cos(\phi(t))y_2$$
$$x_3 = y_3$$

- Il moto di ogni punto del corpo rigido è circolare:

$$\begin{cases} x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = y_1^2 + y_2^2 \\ x_3(t) = y_3 \end{cases}$$

- La velocità di un punto $P$ è data da

$$\mathbf{v}_P = \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\imath}}_3 \wedge (P - O)$$

dove $\mathbf{w} = \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\imath}}_3$ è la velocità angolare del corpo rigido.
- Lo spostamento elementare di $P$ è

$$dP = d\phi\hat{\boldsymbol{\imath}}_3 \wedge (P - O)$$

**MOTO ROTOTRASLATORIO**

Il moto di un corpo rigido è detto rototraslatorio se esiste una retta, solidale con il corpo, che si mantiene parallela a se stessa durante il moto.

- Scegliamo la terna solidale con l'asse $\hat{\boldsymbol{\jmath}}_3$ parallelo alla retta.
- $\hat{\boldsymbol{\jmath}}_3$ è indipendente dal tempo $\Rightarrow \mathbf{w} \wedge \hat{\boldsymbol{\jmath}}_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{w} = w\hat{\boldsymbol{\jmath}}_3$.
- Siccome $\hat{\boldsymbol{\jmath}}_3$ è fisso, possiamo scegliere la terna fissa in modo che $\hat{\boldsymbol{\imath}}_3 = \hat{\boldsymbol{\jmath}}_3$.
- I coseni direttori $\alpha_{hk}$ sono

$$(\alpha)_{hk} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Il moto di un punto arbitrario $P$ del corpo rigido è dato da

$$x_1(t) = c_1(t) + \cos(\phi(t))y_1 - \sin(\phi(t))y_2$$
$$x_2(t) = c_2(t) + \sin(\phi(t))y_1 + \cos(\phi(t))y_2$$
$$x_3(t) = c_3(t) + y_3$$

- La velocità di un punto $P$ è data da

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\imath}}_3 \wedge (P - O)$$

dove $\mathbf{w} = \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\imath}}_3$ è la velocità angolare del corpo rigido.
- Lo spostamento elementare di $P$ è

$$dP = dO' + d\phi\hat{\boldsymbol{\imath}}_3 \wedge (P - O)$$

**MOTO ELICOIDALE**

Il moto di un corpo rigido è detto elicoidale se esiste una retta, solidale con il corpo, i cui punti hanno velocità parallela alla retta stessa.

È un particolare moto rototraslatorio.
- I punti scorrono lungo la retta: scegliamo la terna solidale con l'asse $\hat{\boldsymbol{\jmath}}_3 = \hat{\boldsymbol{\imath}}_3$ parallelo alla retta e l'asse solidale $z'$ coincidente con l'asse fisso $z$.
- Il moto di un punto arbitrario $P$ del corpo rigido è

dato da

$$x_1(t) = \cos(\phi(t))y_1 - \sin(\phi(t))y_2$$
$$x_2(t) = \sin(\phi(t))y_1 + \cos(\phi(t))y_2$$
$$x_3(t) = c_3(t) + y_3$$

- La velocità di un punto $P$ è data da

$$\mathbf{v}_P = c_3(t)\hat{\boldsymbol{\imath}}_3 + \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\imath}}_3 \wedge (P - O) = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{w} \wedge (P - O)$$

La velocità angolare $\mathbf{w}$ è proporzionale alla velocità di $O'$.

## ATTI DI MOTO

### DEFINIZIONE

Chiamiamo atto di moto o stato cinetico di un corpo rigido ad un instante $t$ *l'insieme delle velocità dei singoli punti* del corpo relativo al dato istante.

### ATTO DI MOTO DI TRASLAZIONE

Un atto di moto di traslazione nell'istante $t$ è una distribuzione di velocità per il corpo rigido dato da
$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_{O'}(t)$, dove $O'$ è un qualsiasi punto del corpo rigido.

### OSSERVAZIONE

Se un corpo rigido si muove in modo che in ogni istante il suo atto di moto è di traslazione, allora anche il moto del corpo rigido è di traslazione e viceversa.

### ATTO DI MOTO DI ROTAZIONE

Un atto di moto di rotazione nell'istante $t$ è una distribuzione di velocità per il corpo rigido del tipo
$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{w}(t) \wedge (P - O)$.
Il vettore $\mathbf{w}(\mathrm{t})$ è detto *velocità angolare istantanea* del corpo rigido.

### OSSERVAZIONE

Se un corpo rigido si muove di moto di rotazione, in ogni istante passa per uno stato cinetico di rotazione. NON vale il viceversa. Ad esempio un corpo rigido con un punto fisso passa in ogni istante per uno stato cinetico di rotazione pur non essendo in generale il moto di rotazione: in ogni istante il moto è di rotazione attorno ad un asse, ma l'asse non è sempre lo stesso.

## ATTO DI MOTO DI ROTOTRASLAZIONE

Un atto di moto di rototraslazione nell'istante $t$ è una distribuzione di velocità per il corpo rigido del tipo

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_{O'}(t) + \mathbf{w}(t) \wedge (P - O'). \qquad (4)$$

## ATTO DI MOTO ELICOIDALE

Un atto di moto elicoidale nell'istante $t$ è una distribuzione di velocità per il corpo rigido del tipo

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_{O''}(t) + \mathbf{w}(t) \wedge (P - O''), \qquad (5)$$

dove $O''$ è un punto del corpo rigido tale che $\mathbf{v}_{O''} /\!/ \mathbf{w}$.

Mostreremo adesso che, dati due punti $P$ ed $O$ sul rigido, le loro velocitìstantanee verificano sicuramente l'equazione (4). Tuttavia, sarà sempre possibile trovare un punto $O''$ tale che l'equazione (5) è verificata. Possiamo allora dire che il più generale atto di moto di un corpo rigido è elicoidale.

**FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI**

L'atto di moto di un corpo rigido ad ogni istante è della forma:
$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_{O'}(t) + \mathbf{w}(t) \wedge (P - O')$,
dove
- $\mathbf{w}$ NON dipende da $P$.
- $\mathbf{w}$ è unico.
- $\mathbf{w}$ NON dipende da $O'$

- Abbiamo già visto (equazione (2)) che le coordinate di un punto sono date da

$$P - O = \sum_{k=1}^{3} y_k \hat{\boldsymbol{\jmath}}_k + \sum_{k=1}^{3} c_k \hat{\boldsymbol{\imath}}_k.$$

Derivando rispetto al tempo ed utilizzando le formule di Poisson si ottiene immediatamente:
$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_{O'}(t) + \mathbf{w}(t) \wedge (P - O')$.

- Lo spostamento elementare è dato da
$dP = dO' + \mathbf{w}dt \wedge (P - O')$

<u>Esercizio</u>. Mostrare che $\mathbf{w}$ è unico e non dipende nè da $P$ nè da $O'$.

<u>Esercizio</u>. Mostrare che, derivando rispetto a $t$ la formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi e denotando con $P^*$ la proiezione di $P$ sull'asse passante per $O'$ e $//$ a $\mathbf{w}$, si ottiene per l'accelerazione del punto $P$:
$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{O'} + \frac{d\mathbf{w}}{dt} \wedge (P - O') - w^2(P - P^*)$

**TEOREMA DI MOZZI**

In ogni istante il più generale atto di moto di un sistema materiale rigido è elicoidale: in particolare potrà essere rotatorio o traslatorio.

1 - Sappiamo che $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{w} \wedge (P - O')$. Sia $\mathbf{w} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}^{\perp}_{O'} + \mathbf{v}^{//}_{O'}$ con $\mathbf{v}^{\perp}_{O'} \perp \mathbf{w}$ e $\mathbf{v}^{//}_{O'} // \mathbf{w}$
- Esiste allora un punto $O''$ tale che $\mathbf{v}^{\perp}_{O'} = \mathbf{w} \wedge (O' - O'') \Rightarrow$
- $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}^{\perp}_{O'} + \mathbf{v}^{//}_{O'} + \mathbf{w} \wedge (P - O') = \mathbf{v}^{//}_{O'} + \mathbf{w} \wedge (P - O'')$
- La formula precedente è valida qualunque sia il punto $P$. In particolare è valida anche se $P = O'' \Rightarrow$
$\mathbf{v}_{O''} = \mathbf{v}^{//}_{O'} \Rightarrow$
$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O''} + \mathbf{w} \wedge (P - O'')$
La precedente implica che l'atto di moto è elicoidale.

2 Se $\mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow$ l'atto di moto è traslatorio.

3 Se $\mathbf{v}^{/\!/}_{O'} = \mathbf{0}$ l'atto di moto è rotatorio.

Esercizio: dal punto di vista puramente matematico, la legge di variazione dei momenti $\mathbf{M}_P = \mathbf{M}'_O + \mathbf{R} \wedge (P - O')$ è formalmente analoga alla legge fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}'_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O')$. Data questa analogia, dare una dimostrazione alternativa del Teorema di Mozzi.

## CINEMATICA DEI MOTI RELATIVI

- Supponendo che sia la misura di distanza tra due punti prefissati che l'esistenza di una misura di tempo assoluta non dipenda dall'osservatore, introduciamo due osservatori distinti
$(O, x, y, z)$ con versori $(\hat{\boldsymbol{\imath}}_1, \hat{\boldsymbol{\imath}}_2, \hat{\boldsymbol{\imath}}_3)$
$(O', x', y', z')$ con versori $(\hat{\boldsymbol{\jmath}}_1, \hat{\boldsymbol{\jmath}}_2, \hat{\boldsymbol{\jmath}}_3)$
in moto l'uno rispetto all'altro e dotati dello stesso sistema di misura del tempo.
- Chiamiamo
$(O, x, y, z)$ sistema di riferimento fisso

$(O', x', y', z')$ sistema di riferimento mobile

- Il moto di un punto nel sistema fisso, nel sistema mobile ed il moto di $O'$ nel sistema fisso sono dati rispettivamente da:

$(P - O) = x_1\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{\imath}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{\imath}}_3$

$(P - O') = y_1\hat{\boldsymbol{\jmath}}_1 + y_2\hat{\boldsymbol{\jmath}}_2 + y_3\hat{\boldsymbol{\jmath}}_3$

$(O' - O) = c_1\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + c_2\hat{\boldsymbol{\imath}}_2 + c_3\hat{\boldsymbol{\imath}}_3$

**DEFINIZIONE**

- La velocità di $P$ riferita al sistema di riferimento fisso $(O, x, y, z)$ è detta velocità assoluta $\mathbf{v}_a$ di $P$
  $\mathbf{v}_a = \dot{x}_1\hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + \dot{x}_2\hat{\boldsymbol{\imath}}_2 + \dot{x}_3\hat{\boldsymbol{\imath}}_3$
- La velocità di $P$ riferita al sistema di riferimento mobile $(O', x', y', z')$ è detta velocità relativa $\mathbf{v}_r$ di $P$
  $\mathbf{v}_r = \dot{y}_1\hat{\boldsymbol{\jmath}}_1 + \dot{y}_2\hat{\boldsymbol{\jmath}}_2 + \dot{y}_3\hat{\boldsymbol{\jmath}}_3$
- La velocità del punto della terna mobile che, nell'istante considerato, coincide con $P$ è detta velocità di trascinamento $\mathbf{v}_\tau$
  $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v}_{O'} + y_1\frac{d\hat{\boldsymbol{\jmath}}_1}{dt} + y_2\frac{d\hat{\boldsymbol{\jmath}}_2}{dt} + y_3\frac{d\hat{\boldsymbol{\jmath}}_3}{dt}$

## TEOREMA (di composizione delle velocità)

In ogni istante $t$
$\mathbf{v}_a(t) = \mathbf{v}_r(t) + \mathbf{v}_\tau(t)$

## DEFINIZIONE

- L'accelerazione di $P$ riferita al sistema di riferimento fisso $(O, x, y, z)$ è detta accelerazione assoluta $\mathbf{a}_a$ di $P$
  $\mathbf{a}_a = \ddot{x}_1 \hat{\boldsymbol{\imath}}_1 + \ddot{x}_2 \hat{\boldsymbol{\imath}}_2 + \ddot{x}_3 \hat{\boldsymbol{\imath}}_3$
- L'accelerazione di $P$ riferita al sistema di riferimento mobile $(O', x', y', z')$ è detta accelerazione relativa $\mathbf{a}_r$ di $P$
  $\mathbf{a}_r = \ddot{y}_1 \hat{\boldsymbol{\jmath}}_1 + \ddot{y}_2 \hat{\boldsymbol{\jmath}}_2 + \ddot{y}_3 \hat{\boldsymbol{\jmath}}_3$
- L'accelerazione del punto della terna mobile che, nell'istante considerato, coincide con $P$ è detta accelerazione di trascinamento $\mathbf{v}_\tau$
  $\mathbf{a}_\tau = \mathbf{a}_{O'} + y_1 \frac{d^2 \hat{\boldsymbol{\jmath}}_1}{dt^2} + y_2 \frac{d^2 \hat{\boldsymbol{\jmath}}_2}{dt^2} + y_3 \frac{d^2 \hat{\boldsymbol{\jmath}}_3}{dt^2}$
- L'accelerazione di Coriolis $\mathbf{a}_c$ è la quantità
  $\mathbf{a}_C = 2\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_r$
  dove $\mathbf{w}$ è ottenuto dalle formule di Poisson (velocità angolare della terna mobile) e $\mathbf{v}_r$ è la velocità relativa di $P$

**TEOREMA (composizione delle accelerazioni)**

In ogni istante $t$
$\mathbf{a}_a(t) = \mathbf{a}_r(t) + \mathbf{a}_\tau(t) + \mathbf{a}_c$

**PARTICOLARI MOTI DI TRASCINAMENTO**

Definiamo moto di trascinamento il moto della terna mobile rispetto a quella fissa

Supponiamo che il moto di trascinamento sia **traslatorio** $\Rightarrow$ tutti i punti solidali con la terna mobile hanno la stessa velocità e la stessa accelerazione $\Rightarrow$ possiamo scegliere $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v}_{O'}$ e $\mathbf{a}_\tau = \mathbf{a}_{O'}$.
Il teorema di composizione delle velocità è formulato come $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_{O'}$.
Il moto è **traslatorio** $\Rightarrow \mathbf{w} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_c = \mathbf{0}$.
Il teorema di composizione delle accelerazioni è formulato come $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_{O'}$
Nel caso particolare di *moto di trascinamento rettilineo ed uniforme*, si ha $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r$: l'accelerazione del punto $P$ è *la stessa* per l'osservatore nel sistema fisso e l'osservatore nel sistema mobile.

Due osservatori si dicono equivalenti se i sistemi di riferimento ad essi associati si muovono uno rispetto all'altro di moto traslatorio rettilineo ed uniforme.

Un'altro particolare moto di trascinamento è quello rotatorio ed uniforme intorno ad una retta passante per $O$. In questo caso:
$\mathbf{v}_\tau = \mathbf{w} \wedge (P - O)$ e $\mathbf{a}_\tau = -w^2(P - P^*)$
dove $P^*$ è la proiezione di $P$ sull'asse di rotazione. Quindi:
$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{w} \wedge (P - O)$
$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r - w^2(P - P^*) + +2\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_r$

## MOTI RELATIVI PER CORPI RIGIDI

Introduciamo tre sistemi di riferimento:
$(O, x, y, z)$ sistema di riferimento fisso
$(O', x', y', z')$ sistema di riferimento mobile
$(O'', x'', y'', z'')$ sistema di riferimento solidale con il corpo rigido
Definiamo poi
- assoluto il moto del corpo rigido rispetto al sistema fisso.

- relativo il moto del corpo rigido rispetto al sistema mobile.
- Per ogni punto $P$ del rigido:
$\mathbf{v}_P^{(a)} = \mathbf{v}_{O''}^{(a)} + \mathbf{w}_a \wedge (P - O'')$
$\mathbf{v}_P^{(r)} = \mathbf{v}_{O''}^{(r)} + \mathbf{w}_r \wedge (P - O'')$
dove gli apici $(a)$ ed $(r)$ indicano che le velocità sono riferite al sistema fisso e mobile.
Definiamo poi velocità angolare di trascinamento $\mathbf{w}_\tau$ la velocità angolare del corpo rigido **pensato rigidamente collegato** con il sistema *mobile* $(O', x', y', z')$.
- Per ogni punto $P$ del rigido:
$\mathbf{v}_P^{(\tau)} = \mathbf{v}_{O''}^{(\tau)} + \mathbf{w}_\tau \wedge (P - O'')$.

**TEOREMA (comp. delle velocità angolari)**

In ogni istante $t$
$\mathbf{w}_a(t) = \mathbf{w}_r(t) + \mathbf{w}_\tau(t)$

Infatti, dalla differenza $\mathbf{v}_P^{(a)} - \mathbf{v}_P^{(r)} - \mathbf{v}_P^{(\tau)}$, utilizzando le relazioni precedenti ed il teorema di composizione delle velocità, si ottiene

$$(\mathbf{w}_a - \mathbf{w}_r - \mathbf{w}_\tau) \wedge (P - O'') = \mathbf{0} \ \ \forall P,$$

da cui il teorema per l'arbitrarietà di $P$.

## MOTI RIGIDI PIANI

Un esempio notevole di moto di un corpo rigido è il moto rigido piano.

**DEFINIZIONE**

Un corpo rigido si muove di moto rigido piano se le velocità dei suoi punti sono sempre parallele ad un piano fisso $\pi$

**Teorema**

L'atto di moto di un corpo rigido che si muove di moto rigido piano è sempre rotatorio o traslatorio

- Sia $(O, x, y, z)$ il riferimento fisso con asse $z \perp \pi$.
- Sia $(O', x', y', z')$ il riferimento solidale con $z' /\!/$ all'asse $z$. Quindi $\hat{\boldsymbol{j}}_3$ è un versore costante $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ se $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{w} /\!/ \hat{\boldsymbol{j}}_3$
- Poichè il moto è rigido piano $\mathbf{v}_{O'} \perp \hat{\boldsymbol{j}}_3 \Rightarrow$ esiste $O''$ tale che $\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{w} \wedge (O' - O'')$. Abbiamo allora
$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{w} \wedge (P - O') = \mathbf{w} \wedge (P - O'') \Rightarrow$
l'atto di moto è rotatorio.
- Se $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, dalla formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi, l'atto di moto è traslatorio.
- L'atto di moto traslatorio può anche essere pensa-

to come caso degenere di atto di moto rotatorio con asse di istantanea rotazione all'infinito.

**Centro di istantanea rotazione**

Definiamo centro di istantanea rotazione $C$ l'intersezione tra l'asse di istantanea rotazione ed il piano $\pi$.

La velocità di ogni $P \in$ piano $(O', y', z')$ è data da

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{w}(t) \wedge (P(t) - C(t))$$

dove $C = C(t)$ è il centro di istantanea rotazione riferito all'istante $t$.
Nota bene: $\mathbf{v}_{C(t)} = \mathbf{0}$, ma questo non vuol dire che $C$ è fermo
Osserviamo poi che:
$\mathbf{v}_P \cdot (P - C) = \mathbf{w} \wedge (P - C) \cdot (P - C) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{v}_P \perp (P - C)$

Da $\mathbf{v}_P \perp (P - C)$ segue che la velocità $\mathbf{v}_P$ di ogni punto $P \in$ figura piana in moto nel proprio piano è determinata se sono note le posizioni del c.i.r. $C$ e la velocità $\mathbf{v}_{P_0}$ di un punto $P_0 \in$ figura piana. Infatti:

Da $\mathbf{v}_{P_0} \perp (P_0 - C)$ e $\mathbf{v}_P \perp (P - C)$ si ricava che
- la direzione di $\mathbf{v}_P$ è tale che$\mathbf{v}_P \perp (P - C)$,
- il verso di $\mathbf{v}_P$: lo stesso di $\mathbf{v}_{P_0}$,
- il modulo di $\mathbf{v}_P$: $\mathbf{v}_P = \frac{r}{r_0}\mathbf{v}_{P_0}$.

Nota bene: Se sono note in un dato istante $t$ le direzioni delle traiettorie o le velocità di due punti della figura piana, allora il c.i.r. $C$ è dato dall'**intersezione** delle normali alla direzione delle traiettorie o delle velocità dei due punti considerati.