5 Sistemi materiali rigidi

Vincoli esterni ad un corpo rigido

Definiamo sistema materiale rigido un corpo rigido su cui possono agire anche vincoli esterni.

CR appoggiato in un solo punto

- Il vincolo di appoggio si schematizza attraverso $(\boldsymbol{\phi}, O)$.
- Dal PRV si ha $\delta L^{(v)} = \delta L^{(v,i)} + \boldsymbol{\phi} \cdot \delta O \geq 0$.
- Ma $\delta L^{(v,i)} = 0$ (essendo un corpo rigido), quindi $\boldsymbol{\phi} \cdot \delta O \geq 0$.
- Pertanto $\boldsymbol{\phi} \perp$ alla superficie in O e con verso esterno ad essa.

- L'ultima considerazione discende dal fatto che il vincolo di appoggio è unilaterale.
- Poichè la direzione ed il verso della reazione sono noti, l'incognita è il modulo: ogni punto di appoggio comporta una incognita scalare.

CR con punto fisso O

- Il vincolo di un corpo rigido con punto fisso O si può realizzare attraverso una cerniera sferica (una sfera solidale con il CR e vincolata a rimanere in una cavità sferica di centro O) oppure mediante una sospensione cardanica.
- Il vincolo si schematizza attraverso $(\boldsymbol{\phi}, O)$.
- Dal PRV si ha
$\delta L^{(v)} = \delta L^{(v,i)} + \boldsymbol{\phi} \cdot \delta O + \boldsymbol{\Psi}_O \cdot \boldsymbol{w} \delta t \geq 0$, con

$$\boldsymbol{\phi} = \sum_s \boldsymbol{\phi}_s, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Psi}_O = \sum_s (P_s - O) \wedge \boldsymbol{\phi}_s$$

dove $\boldsymbol{\phi}_s$ indicano le reazioni vincolari che agiscono sui punti P_s della superficie sferica di centro O.
- Ma $\delta L^{(v,i)} = 0$ (essendo un corpo rigido) e $\delta O = \mathbf{0}$, quindi $\boldsymbol{\Psi}_O \cdot \boldsymbol{w} = 0$ $\forall \boldsymbol{w}$
- Risulta pertanto che $\boldsymbol{\Psi}_O = \mathbf{0}$.
- Il sistema delle reazioni vincolari è quindi equivalente ad una sola reazione vincolare $(\boldsymbol{\phi}, O)$ avente direzione arbitraria.

CR con asse fisso.

- Il vincolo di un corpo rigido con asse fisso $\boldsymbol{u}$ si può realizzare attraverso una cerniera cilindrica (si pratica all'interno del corpo rigido una cavità cilindrica al cui interno puo passare un cilindro di raggio appena inferiore a quello della cavita).
- Il vincolo di un corpo rigido con asse fisso $\boldsymbol{u}$ si schematizza attraverso un sistema di reazioni vincolari $(\boldsymbol{\phi}_s, P_s)$ incidenti l'asse fisso $\boldsymbol{u}$.
- Quindi

$$\Psi_u = \boldsymbol{\Psi}_O \cdot \boldsymbol{u} = \sum_s (P_s - O) \wedge \boldsymbol{\phi}_s \cdot \boldsymbol{u} = 0,$$

essendo $P_s - O$ paralleo a $\boldsymbol{u}$.

Sbarra rigida incastrata in una cavità

- Sia B il punto d'incastro (il punto in cui la sbarra inizia ad entrare nella cavita).
- Tale vincolo si realizza mediante una reazione $(\boldsymbol{\phi}, B)$ più una coppia di momento $\boldsymbol{\Phi}_B$ rispetto a B.

Equazioni cardinali della dinamica per sistemi materiali rigidi.

- Abbiamo dimostrato che le equazioni cardinali della dinamica

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^e(x, \dot{x}, t) + \boldsymbol{\phi}^e, \\ \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{\Omega}^e_O(x, \dot{x}, t) + \boldsymbol{\Psi}^e_O \end{cases} \tag{1}$$

sono condizioni necessarie nello studio del moto dei sistemi materiali
In generale, tali equazioni non sono condizioni sufficienti.

Proposizione

Per un sistema materiale rigido le equazioni cardinali della dinamica sono condizioni necessarie e sufficienti per studiare il moto del sistema.

Osservazione: nelle equazioni cardinali compaiono solo il risultante ed il momento risultante delle forze esterne: grazie alla sufficienza delle equazioni cardinali, se si cambiano le sollecitazioni $\boldsymbol{R}^e$ e $\boldsymbol{\Psi}^e_O$ con un sistema equivalente, il moto del corpo non viene alterato. Quando il corpo è rigido si possono applicare

i teoremi di riducibilità.
Ad esempio, nel caso della forza peso, applicata a tutti i punti del corpo, essa è sostituibile con un'unica forza $m\boldsymbol{g}$ applicata nel baricentro.

Moto di un corpo rigido libero

- Un corpo rigido libero (cioè senza vincoli) presenta 6 gradi di libertà.
- Per lo studio del moto di un corpo rigido libero si possono utilizzare le 6 equazioni scalari fornite dalle equazioni cardinali della dinamica

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^e(x, \dot{x}, t), \\ \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{\Omega}^e_O(x, \dot{x}, t) \end{cases}$$

Moto di un corpo rigido con punto fisso

- Un corpo rigido con punto fisso O presenta 3 gradi di libertà.
- Per lo studio del moto di un corpo rigido con punto fisso O, essendo $\boldsymbol{\Psi}_O^e = \mathbf{0}$, si possono utilizzare le 3 equazioni scalari fornite dalla seconda equazione cardinale della dinamica

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{\Omega}_O^e(x, \dot{x}, t)$$

- Dalla prima equazione cardinale della dinamica si ricava invece

$$\boldsymbol{\phi}^e = \frac{d}{dt}\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{R}^e(x, \dot{x}, t)$$

L'espressione dettagliata che assume il sistema delle equazioni del moto verrà ripreso alla fine di questo capitolo.

Moto di un corpo rigido con asse fisso $\boldsymbol{u}$

- Un corpo rigido con asse fisso $\boldsymbol{u}$ presenta 1 grado di libertà.
- Per lo studio del moto di un corpo rigido con asse fisso $\boldsymbol{u}$, essendo $\Psi_u^e = 0$, si può utilizzare l'equazione

$$\frac{d}{dt}K_u = \Omega_u^e(x, \dot{x}, t)$$

Pendolo fisico

Chiamiamo pendolo fisico un corpo rigido con asse fisso, non verticale e non baricentrico, detto asse di sospensione, soggetto alla sola azione della forza peso.

Esercizio: determinare le equazioni del moto del pendolo fisico.

Equazioni cardinali della statica.

Consideriamo un sistema materiale
- la cui configurazione sia individuata da $x = (x_1, ..., x_n)$

- il cui atto di moto sia dato da $\dot{x} = (\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$.

Configurazioni di equilibrio

Una configurazione x_e di un sistema materiale è detta di equilibrio se, posto inizialmente il sistema in x_e con atto di moto nullo

$$x(0) = x_e, \qquad \dot{x}(0) = 0,$$

il sistema rimane in x_e per tutti gli istanti successivi, cioè

$$x(t) = x_e, \qquad \forall t > 0.$$

Proposizione

Se x_e è una configurazione di equilibrio per un sistema materiale a vincoli fissi, allora $\forall t \geq 0$

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}^e(x_e, 0, t) + \boldsymbol{\phi}^e = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{\Omega}^e_O(x_e, 0, t) + \boldsymbol{\Psi}^e_O = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{2}$$

Dimostrazione: Se x_e è una configurazione di equilibrio per un sistema materiale a vincoli fissi, allora lo stato di quiete definito da $x(t) = x_e$ $\forall t \geq 0$, è soluzione delle equazioni cardinali (1). Sostituendo la funzione $x(t) = x_e$ in (1), si trovano le equazioni cardinali della statica (2).

Le equazioni cardinali della statica sono condizioni necessarie affinchè una configurazione x_e di un qualsiasi **sistema materiale** a vincoli fissi sia di equilibrio .

Proposizione

Le equazioni cardinali della statica (2) sono condizioni necessarie e sufficienti per determinare le configurazioni di equilibrio per un **corpo rigido** a vincoli fissi.

La dimostrazione di quest'ultima proposizione deriva dal fatto che se x_e è una configurazione per un corpo rigido a vincoli fissi tale da soddisfare (2), allora la funzione quiete $x(t) = x_e, \forall t \geq 0$ verifica le equazioni cardinali della dinamica (1) che, nel caso di corpo rigido, sono condizioni necessarie e sufficienti. Quindi ogni configurazione x_e che soddisfa le (2) è una configurazione di equilibrio per il corpo rigido.

Applicazioni delle equazioni cardinali della statica

Statica di un corpo rigido libero

- Un corpo rigido libero presenta 6 gradi di libertà.
- Per la determinazione delle eventuali configurazioni di equilibrio x_e per un corpo rigido libero si possono utilizzare le 6 equazioni scalari fornite dalle equazioni cardinali della statica

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}^e(x_e, 0, t) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\Omega}^e_O(x_e, 0, t) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Statica di un corpo rigido con punto fisso O.

- Un corpo rigido con punto fisso O presenta 3 gradi di libertà.
- Per la determinazione delle eventuali configurazioni di equilibrio x_e per un corpo rigido con punto fisso O, essendo $\mathbf{\Psi}^e_O = \mathbf{0}$, si possono utilizzare le 3 equazioni scalari fornite dalla seconda equazione cardinale della statica

$$\mathbf{\Omega}^e_O(x_e, 0, t) = \mathbf{0}$$

- Dalla prima equazione cardinale della statica si ricava invece

$$\boldsymbol{\phi}^e = -\boldsymbol{R}^e(x_e, 0, t)$$

Statica di un corpo rigido con asse fisso $\boldsymbol{u}$

- Un corpo rigido con asse fisso $\boldsymbol{u}$ presenta 1 grado di libertà.
- Per la determinazione delle eventuali configurazioni di equilibrio x_e per un corpo rigido con asse fisso $\boldsymbol{u}$, essendo $\Psi_u^e = 0$, si può utilizzare l'equazione

$$\Omega_u^e(x_e, 0, t) = 0$$

- Esaminiamo un caso particolare in cui il vincolo di asse fisso sia realizzato mediante un punto fisso O ed un cuscinetto in O'. Le reazioni vincolari sono quindi $(O, \boldsymbol{\phi})$ e $(O', \boldsymbol{\phi}')$.
- $\boldsymbol{\phi}' \perp \boldsymbol{u}$, mentre non si conosce a priori la direzione di $\boldsymbol{\phi}$.
- Introdotto il sistema di riferimento (O, x_1, x_2, x_3) con $x_3 = u$, proiettando le (2) lungo tali assi di riferimento ed indicato con $d = |O - O'|$, si ha

$$
\begin{cases}
R^e_{x_1}(x_e,0,t) + \Phi_{x_1} + \Phi'_{x_1} = 0,\\
R^e_{x_2}(x_e,0,t) + \Phi_{x_2} + \Phi'_{x_2} = 0,\\
R^e_{x_3}(x_e,0,t) + \Phi_{x_3} = 0,\\
\Omega^e_{x_1}(x_e,0,t) - \Phi'_{x_2} d = 0,\\
\Omega^e_{x_2}(x_e,0,t) + \Phi'_{x_1} d = 0,\\
\Omega^e_{x_3}(x_e,0,t) = 0,
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\Phi_{x_1} = -R^e_{x_1}(x_e,0,t) + \frac{1}{d}\Omega^e_{x_2}(x_e,0,t),\\
\Phi_{x_2} = -R^e_{x_2}(x_e,0,t) - \frac{1}{d}\Omega^e_{x_1}(x_e,0,t),\\
\Phi_{x_3} = -R^e_{x_3}(x_e,0,t),\\
\Phi'_{x_2} = \frac{1}{d}\Omega^e_{x_1}(x_e,0,t),\\
\Phi'_{x_1} = -\frac{1}{d}\Omega^e_{x_2}(x_e,0,t),\\
\Omega^e_{x_3}(x_e,0,t) = 0.
\end{cases}
$$

Sistema materiale staticamente determinato

Un sistema materiale in cui sia possibile calcolare le reazioni vincolari in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio è detto staticamente determinato o isostatico. Nel caso contrario il sistema materiale è detto staticamente indeterminato o iperstatico.

- Se l'asse fisso è realizzato con un punto fisso ed un cuscinetto, il sistema materiale è staticamente determinato.
- Se l'asse fisso è realizzato con un due punti fissi, il sistema materiale è staticamente indeterminato.

Leva

Un esempio di corpo rigido con asse fisso è la leva, cioè un'asta rigida con un asse fisso privo d'attrito e sottoposta ai due estremi a due forze (la *potenza* $\boldsymbol{P}$ e la *resistenza* $\boldsymbol{R}$) appartenenti ad un piano normale all'asse. Se r e p, chiamate braccio della resistenza e braccio della potenza, sono le distanze del punto O (intersezione dell'asse fisso con il piano delle forze) dalle rette di applicazione delle forze, allora dalla condizione di equilibrio

$$\Omega_u^e(x_e, 0, t) = 0$$

si ottiene che, in condizioni di equilibrio, la potenza sta alla resistenza come il braccio della resistenza sta al braccio della potenza

Statica dei sistemi materiali rigidi appoggiati ad un piano liscio.

- Consideriamo un corpo rigido soggetto alla forza peso e appoggiato ad un piano orizzontale privo di attrito tramite un numero finito n di punti.

Le forze in gioco sono:

- Le forze peso, equivalenti al vettore risultante applicato al baricentro del corpo (se ci sono altri carichi verticali, al centro delle forze attive).
- Le n reazioni vincolari, $\perp$ al piano: è un sistema di vettori paralleli $\Rightarrow$ il sistema delle reazioni è equivalente al vettore risultante applicato nel centro A del sistema.
Definiamo come poligono di appoggio il poligono convesso i cui vertici sono tutti punti di appoggio (alcuni punti possono essere interni, ma nessuno è esterno).
- Poichè il poligono è convesso, A è interno al poligono. Le equazioni della statica allora danno

$$|\boldsymbol{\phi}| = m|\boldsymbol{g}|$$

e

$$(G - A) \wedge m\boldsymbol{g} = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$ G ed A devono trovarsi sulla stessa verticale $\Rightarrow$ G deve trovarsi all'interno del perimetro d'appoggio.
Quindi abbiamo mostrato che condizione necessaria e suficiente affinchè ci sia equilibrio è che il baricentro cada all'interno del perimetro d'appoggio.

<u>Esercizio</u>: tramite le equazioni cardinali della statica, mostrare che se il numero dei punti di appoggio è

maggiore di 3 (o uguale a 3 ma con punti collineari), allora il sistema è staticamente indeterminato.

Esercizio: Determinare le reazioni vincolari per una trave poggiata su due punti disposti alla stessa altezza.

Sistemi di corpi rigidi

Se abbiamo un sistema di corpi rigidi tra loro vincolati (sistemi articolati), per ottenere un sistema di equazioni che descriva il moto del sistema bisogna svincolare il sistema: si toglie ogni articolazione e si sostituiscono i vincoli con le reazioni vincolari con l'attenzione che queste devono soddisfare il principio di azione e reazione, in quanto sono interne. Si applicano poi le equazioni cardianli singolarmente ad ogni corpo rigido.

Moto di un corpo rigido con asse fisso e cimenti vincolari

- Consideriamo un corpo rigido con asse fisso u.
- Un corpo rigido con asse fisso ha 1 grado di libertà, che può essere individuato dall'angolo ϕ che un piano solidale con il corpo rigido e passante per l'asse u forma con un piano fisso anch'esso passante per

l'asse u.
- Per lo studio del moto applichiamo il teorema del momento assiale al corpo rigido con asse fisso. Essendo $\Psi_u^e = 0$, si ha

$$\frac{dK_u}{dt} = \Omega_u^e(\phi, \dot{\phi}, t)$$

- Per un corpo rigido con asse fisso si ha

$$K_u = I_u\dot{\phi},$$

dove I_u è il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto ad u. L'equazione differenziale del moto è allora

$$I_u\ddot{\phi} = \Omega_u^2(\phi, \dot{\phi}, t)$$

- Se il vincolo di asse fisso è realizzato mediante un punto fisso O ed un cuscinetto A, allora è possibile determinare le reazioni vincolari $\boldsymbol{\Phi}_O$ e $\boldsymbol{\Phi}_A$.
Negli altri casi, attraverso le equazioni cardinali della dinamica si possono calcolare

$$\boldsymbol{\phi}^e = m\boldsymbol{a}_G - \boldsymbol{R}^e(\phi, \cdot\phi, t),$$
$$\boldsymbol{\Psi}_O^e = \frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} - \boldsymbol{\Omega}_O^e(\phi, \dot{\phi}, t)$$

dove
- $\boldsymbol{R}^e(\phi, \dot{\phi}, t)$ e $\boldsymbol{\Omega}_O^e(\phi, \dot{\phi}, t)$ sono il contributo delle

forze attive esterne agenti sul corpo rigido.
- $m\boldsymbol{a}_G$ e $\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt}$ sono dovuti al moto del corpo rigido
- I termini cinetici che contribuiscono al risultante ed al momento risultante delle reazioni vincolari esterne sono detti cimenti vincolari.

Studiamo ora il contributo dei cimenti vincolari sul moto del corpo rigido con asse fisso.
- Il termine $m\boldsymbol{a}_G$ si annulla solo se il baricentro G del corpo appartiene all'asse fisso di rotazione u.
- Altrimenti, a parità di equazione oraria $\phi = \phi(t)$, il termine $m\boldsymbol{a}_G$ **aumenta** all'aumentare della distanza d di G dall'asse u.
- Nel caso particolare in cui $\boldsymbol{\phi} =$ costante si ha

$$ma_G = m\dot{\phi}^2 d$$

- Inoltre, il momento della quantità di moto, riferito ad una terna solidale con il terzo asse diretto come u (cioè $\boldsymbol{w} = \dot{\phi}\boldsymbol{j}_3$), è dato da

$$\boldsymbol{K}_O = \mathbb{I}_O\boldsymbol{w} = I_{13}\dot{\phi}\boldsymbol{j}_1 + I_{23}\dot{\phi}\boldsymbol{j}_2 + I_{33}\dot{\phi}\boldsymbol{j}_3$$

- Ricordando che, nel caso considerato, $\dot{\phi} =$ costante, $\boldsymbol{j}_3$ è un versore costante, si ha

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = I_{13}\dot{\phi}\frac{d\boldsymbol{j}_1}{dt} + I_{23}\dot{\phi}\frac{d\boldsymbol{j}_2}{dt} = \dot{\phi}^2(I_{13}\boldsymbol{j}_2 - I_{23}\boldsymbol{j}_1)$$

- Quindi il termine $\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt}$ si annulla se $I_{13} = I_{23} = 0$ $\Rightarrow$ l'asse u deve essere principale d'inerzia.
- Nel caso contrario, nel calcolo dei momenti delle reazioni vincolari esterne, bisogna considerare il contributo di $\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt}$ diretto ortogonalmente all'asse, l'effetto della rotazione comporta la presenza di una coppia che agisce sull'asse e tende a farlo ruotare attorno alla direzione di $\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt}$.
- Quindi, in presenza di organi ruotanti, per rendere minimi gli effetti della rotazione, è conveniente costruire un sistema meccanico in modo che il baricentro G appartenga all'asse fisso u e che tale asse sia principale d'inerzia.
- Quando questo non avviene gli effetti della rotazione provocano sull'asse delle reazioni dette cimenti vincolari.

Moto di un corpo rigido con punto fisso

- Consideriamo un corpo rigido con punto fisso O.
- Un CR con punto fisso ha tre gradi di libertà (che ad esempio possono essere individuati dagli angoli di Eulero).
- Per lo studio del moto applichiamo la seconda equazione cardinale della dinamica al corpo rigido con

punto fisso. Essendo $\boldsymbol{\Psi}_O^e = \mathbf{0}$, si ha

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_O^e$$

- Per un corpo rigido con punto fisso si ha

$$\boldsymbol{K}_O = \mathbb{I}_O \boldsymbol{w} = I_1 w_1 \boldsymbol{j}_1 + I_2 w_2 \boldsymbol{j}_2 + I_3 w_3 \boldsymbol{j}_3$$

dove I_1, I_2, I_3 sono i momenti principali d'inerzia. Derivando $\boldsymbol{K}_O$ rispetto al tempo, si ottengono le equazioni di Eulero

$$\begin{aligned} I_1 \dot{w}_1 + (I_3 - I_2) w_2 w_3 &= \Omega_1^e \\ I_2 \dot{w}_2 + (I_1 - I_3) w_1 w_3 &= \Omega_2^e \\ I_3 \dot{w}_3 + (I_2 - I_1) w_1 w_2 &= \Omega_3^e \end{aligned}$$