Appunti sui vettori e sui vettori applicati

Federico Zullo

DICATAM, Università di Brescia

Indirizzo: via Valotti 9 (piano terra), 25133 Brescia.

Email: federico.zullo@unibs.it

federico-zullo.unibs.it

<u>NOTA BENE:</u> *Questo materiale non sostituisce quanto presente nei testi consigliati o quanto esposto a lezione e nelle esercitazioni, ma va inteso come un ulteriore aiuto allo studio e come un approfondimento e completamento per un'adeguata preparazione all'esame.*

1 Richiami di calcolo vettoriale

Le basi del calcolo vettoriale si suppongono già note agli studenti dai corsi precedenti. Questa sezione deve essere considerata un richiamo alla memoria, scritta anche per fissare le notazioni. Alcuni aspetti che interessano particolarmente questo corso sono messi maggiormente in rilievo.

1.1 Scalari e vettori

Per quanto ci riguarda possiamo dire che un vettore è un ente geometrico *fittizio* grazie al quale riusciamo a *quantificare* le rappresentazioni concettuali, quali forze, velocità, momenti angolari etc., che ci permettono di descrivere un determinato fenomeno fisico. In particolare, tutte le entità fisiche alle quali è necessario associare una *grandezza* (detta anche modulo del vettore), una *direzione* ed un *verso* per poter essere descritte in maniera completa, saranno associate ad un vettore. Se invece è sufficiente un valore numerico saranno associate ad uno scalare. Un esempio di grandezza scalare è data dalla temperatura: per definire in maniera univoca la temperatura di un punto in una stanza in un dato istante è sufficiente il valore numerico dei gradi centigradi. L'esempio più immediato per una grandezza vettoriale è dato dallo *spostamento* di un oggetto da una posizione ad un'altra: per identificare un qualsiasi spostamento abbiamo bisogno di sapere la distanza coperta, la direzione dello spostamento, cioè la retta immaginaria lungo la quale esso è avvenuto, ed il verso, cioè la sua orientazione sulla retta. Quando i vettori vengono considerati in maniera astratta, indipendentemente dalla grandezza fisica a cui corrispondono, è possibile associare delle operazioni matematiche ad essi: quello che si ottiene è l'algebra dei vettori.

In generale i vettori vengono indicati da lettere in grassetto, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ oppure con $\vec{u}, \vec{v}$. Il modulo di un vettrore $\mathbf{u}$ invece viene indicato con $|\mathbf{u}|$. Nello spazio, o anche nel piano, essi vengono rappresentati tramite segmenti orientati: dato il vettore $\mathbf{u}$, la lunghezza del segmento è direttamente proporzionale al modulo di $\mathbf{u}$, la direzione coincide con la retta sulla quale giace il segmento, mentre il verso è indicato generalmente da una punta di freccia che specifica l'orientazione del segmento. È bene tener presente che questa è solo una delle possibili rappresentazioni del vettore $\mathbf{u}$: infatti tutti i segmenti che sono sovrapponibili al segmento dato tramite una traslazione rappresentano lo stesso vettore. In questo senso si dice che i vettori dello spazio sono le *classi di equipollenza* dei segmenti orientati.

Partendo dall'esempio precedente dello spostamento, se pensiamo di fissare un'origine O di un sistema di riferimento, possiamo definire una posizione iniziale A dell'oggetto spostato ed una posizione finale B. Lo spostamento è identificato da un segmento orientato il cui estremo iniziale è il punto A e il cui estremo finale è il punto B. Esso è quindi un rappresentante della classe di equipollenza dei segmenti orientati paralleli al segmento AB e che hanno la stessa lunghezza e lo stesso verso (orientazione). Più in particolare è il segmento il cui punto di applicazione (cioè la cui origine) coincide con A. Il vettore spostamento è un esempio di *vettore applicato*, cioè di segmento orientato di cui si specifica il punto di applicazione. Nel seguito quando parleremo di rappresentante di un vettore, intenderemo proprio un vettore applicato appartenente alla classe di equipollenza del vettore.

Per identificare un vettore applicato abbiamo quindi bisogno oltre che del vettore $\mathbf{u}$ anche del suo punto di applicazione A: esso sarà quindi in genere indicato con $(\mathbf{v}, A)$.

Si noti che spesso, quando non c'è ambiguità sul punto di applicazione oppure il risultato non dipende dal punto di applicazione, il vettore applicato $(\mathbf{u}, A)$ può essere anche indicato più semplicemente con $\mathbf{u}$.

Come vedremo sarà molto utile indicare il vettore applicato $(\mathbf{u}, A)$ anche con $\mathbf{u} = B - A$, dove B è l'altro estremo del segmento orientato AB.

1.2 Rappresentazione analitica dei vettori.

Abbiamo detto che graficamente è possibile rappresentare i vettori tramite segmenti orientati (o meglio tramite la classe di equipollenza di un segmento orientato). Dal punto di vista analitico invece è comodo introdurre la loro rappresentazione cartesiana. Si fissa quindi un sistema di riferimento cartesiano e si proiettano le estremità di un rappresentate del vettore sugli assi cartesiani. Se il vettore considerato $\mathbf{u}$ è rappresentato dal segmento AB, allora le proiezioni sugli assi x, y e z saranno $(x_B - x_A)$, $(y_B - y_A)$ e $(z_B - z_A)$.Quindi si avrà

$$\vec{u} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A). \qquad (1)$$

Le componenti x, y e z di un generico vettore $\mathbf{u}$ vengono indicate di solito con $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$.
Esercizio: Mostrare che la rappresentazione grafica e quella cartesiana coincidono. Più in particolare mostrare che,

dati modulo direzione e verso di un vettore nel piano, è possibile trovare le sue componenti cartesiane. Viceversa, date le sue componenti cartesiane, mostrare che è possibile trovare il modulo, la direzione ed il verso.

1.3 Operazioni sui vettori

Abbiamo già accennato al fatto che è possibile associare operazioni matematiche ai vettori. Vediamole più esplicitamente.

Somma tra vettori.

Consideriamo due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Possiamo definire il vettore somma $\mathbf{w} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$ in questo modo: se un rappresentante di $\mathbf{u}$ è il vettore applicato $(\mathbf{u}, O) = P - O$, prendiamo come rappresentante di $\mathbf{v}$ il vettore applicato $Q-P$ (facendo quindi coincidere l'estremità P che indica l'orientazione del primo con il punto di applicazione del secondo): il vettore somma $\mathbf{w}$ è dato dalla classe di equipollenza del vettore applicato $Q-O$, cioè da tutti i segmenti orientati paralleli al segmento orientato $Q - O$ ed aventi la sua stessa lunghezza e verso. Nel caso in cui i punti Q e O coincidono si ottiene il vettore nullo $\mathbf{0}$. Per sommare tre vettori si sommano i primi due e poi il risultato lo si addiziona al terzo.

L'equivalente analitico della somma di due vettori è semplice: dati due vettori $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, il vettore somma $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ è dato da

$$\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z) = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z).$$

I vettori di modulo pari a 1 sono chiamati *versori*. Data la loro importanza, per distinguerli dai vettori si è soliti scriverli con un accento circonflesso, ad esempio $\hat{\mathbf{u}}$ o $\hat{u}$. Ogni vettore $\mathbf{v}$ può essere scritto come $v\hat{\mathbf{u}}$, dove v è il modulo di $\mathbf{v}$ ed $\hat{\mathbf{u}}$ il versore corrispondente di $\mathbf{v}$ (che dà quindi la direzione ed il verso). In particolare si possono definire i versori di una terna cartesiana ortogonale come $\hat{\mathbf{i}}_1$, $\hat{\mathbf{i}}_2$ ed $\hat{\mathbf{i}}_3$: questi hanno la caratteristica di essere perpendicolari tra loro. Gli assi cartesiani sono semirette aventi la stessa origine O (l'origine del sistema di riferimento) e orientate come $\hat{\mathbf{i}}_1$, $\hat{\mathbf{i}}_2$ ed $\hat{\mathbf{i}}_3$.

Esercizio: Mostrare che le componenti cartesiane dei versori $\hat{\mathbf{i}}_1$, $\hat{\mathbf{i}}_2$ ed $\hat{\mathbf{i}}_3$ sono date rispettivamente da $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Moltiplicazione per uno scalare.

Se si moltiplica un numero $a \in \mathbb{R}$ per un vettore $\mathbf{u}$ si ottiene un vettore che ha la stessa direzione del vettore dato, verso uguale oppure opposto a seconda che a sia positivo oppure negativo e modulo uguale ad $|a|\mathbf{u}$ dove $|a|$ indica il valore assoluto di a. Il vettore $-1\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ è il vettore opposto di $\mathbf{u}$, ha lo stesso modulo, stessa direzione

ma verso opposto. L'equivalente analitico di $a\mathbf{u}$ è dato da (au_x, au_y, au_z), cioè ogni componente viene moltiplicata per il numero dato.
Esercizio: Mostrare che un vettore $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ può essere scritto come somma delle sue componenti cartesiane, $\mathbf{u} = u_x\hat{\mathbf{i}}_1 + u_y\hat{\mathbf{i}}_2 + u_z\hat{\mathbf{i}}_3$.

Differenza fra vettori.

La differenza fra due vettori $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ è semplicemente la somma tra il vettore $\mathbf{u}$ e l'opposto del vettore $\mathbf{v}$: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. Quindi avremo $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y, u_z - v_z)$.

Prodotto scalare.

Il prodotto scalare tra due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è un'operazione che associa ai due vettori un numero. È indicato con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ed è uguale a

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv\cos(\theta) \tag{2}$$

dove θ è l'angolo tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali allora $\cos(\theta) = 0$ ed il prodotto scalare tra i vettori è nullo. Viceversa, se il prodotto scalare tra due vettori è nullo, allora o almeno uno dei due vettori è il vettore nullo, oppure i due vettori sono ortogonali tra loro. Geometricamente $v\cos(\theta)$ rappresenta la proiezione di $\mathbf{v}$ sul vettore $\mathbf{u}$, mentre $u\cos(\theta)$ è la proiezione di $\mathbf{u}$ sul vettore $\mathbf{v}$. Quindi possiamo anche pensare al prodotto scalare (2) come il prodotto del modulo di un vettore per la proiezione dell'altro vettore sul primo.

È importante notare che se l'uguaglianza $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ è vera per ogni vettore $\mathbf{v}$, allora necessariamente si ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
Esercizio: dimostrare la precedente affermazione.
In realtà è sufficiente che ci siano tre vettori indipendenti[1] $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ tali che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, affinchè sia $\mathbf{u} = 0$.
Esercizio: Scrivendo i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ come somma delle loro componenti cartesiane, mostrare che la definizione cartesiana di prodotto scalare è data da $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$.

Prodotto vettoriale.
Il prodotto vettoriale tra due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è un'operazione che associa ai due vettori un altro vettore. È indicato con $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ oppure con $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ed è il vettore che ha modulo pari a

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = uv \sin(\theta) \tag{3}$$

dove θ è l'angolo tra i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, direzione perpendicolare al piano individuato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e verso tale che $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ formino una terna destra. Si può facilmente ottenere il verso di $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ anche utilizzando la regola della mano destra: si dispone il pollice lungo il verso del primo vettore $\mathbf{u}$, l'indice lungo il verso del secondo vettore $\mathbf{v}$ e si piega il medio perpendicolarmente al palmo della mano: il

[1] Un insieme n di vettori $v_1 \dots v_n$ sono linearmente indipendenti se non è possibile scrivere nessuno di questi come combinazione lineare degli altri. In altre parole l'uguaglianza $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ è verificata se e solo se gli a_i sono tutti zero.

verso di $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ coincide con quello del medio. Si noti che nel caso in cui due vettori siano paralleli, allora il loro prodotto vettoriale è nullo in quanto $\sin(\theta) = 0$. Viceversa, se il prodotto vettoriale tra due vettori è nullo, o almeno uno di essi è il vettore nullo, oppure sono paralleli. La condizione di parallelismo tra due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ implica una proporzionalità, cioè esisterà un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$.
Esercizio: Utilizzando la regola della mano destra, mostrare che il prodotto vettoriale è anticommutativo, cioè vale $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.
Esercizio: Utilizzando la regola della mano destra, verificare che $\hat{\mathbf{i}}_1 \wedge \hat{\mathbf{i}}_2 = \hat{\mathbf{i}}_3$, $\hat{\mathbf{i}}_2 \wedge \hat{\mathbf{i}}_3 = \hat{\mathbf{i}}_1$, $\hat{\mathbf{i}}_3 \wedge \hat{\mathbf{i}}_1 = \hat{\mathbf{i}}_2$.
Esercizio: Scrivendo i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ come somma delle loro componenti cartesiane, mostrare che la definizione cartesiana di prodotto vettoriale è data da $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$.

Esercizi. I seguenti esercizi sono proposti per fissare i concetti su esposti.
Esercizio: Dati i vettori nel piano $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}}_1 + 2\hat{\mathbf{i}}_2$ e $\mathbf{v} = 2\hat{\mathbf{i}}_1 + 3\hat{\mathbf{i}}_2$, determinare i loro moduli, le loro direzioni e i loro versi (si noti che per direzione e verso è sufficiente l'angolo che forma la semiretta positiva dell'asse delle x con la retta che contiene i vettori e passa per l'origine. L'angolo

va misurato in senso antiorario).
Esercizio: Un vettore nel piano (x, y) ha modulo pari 2 e forma un angolo pari a $\pi/4$ con l'asse delle x. Determinare la sua rappresentazione cartesiana.
Esercizio: Dati i vettori $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}}_1 + 2\hat{\mathbf{i}}_2 - \hat{\mathbf{i}}_3$ e $\mathbf{v} = 3\hat{\mathbf{i}}_1 - 2\hat{\mathbf{i}}_2 + \hat{\mathbf{i}}_3$ determinare i vettori $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.
Esercizio: Verificare che i vettori $\mathbf{v}_1 = 2\hat{\mathbf{i}}_1 - \hat{\mathbf{i}}_2 + 10\hat{\mathbf{i}}_3$ e $\mathbf{v}_2 = 3\hat{\mathbf{i}}_1 + 6\hat{\mathbf{i}}_2$ sono perpendicolari, mentre i vettori $\mathbf{u}_1 = 2\hat{\mathbf{i}}_1 - \hat{\mathbf{i}}_2 + \hat{\mathbf{i}}_3$ e $\mathbf{u}_2 = 4\hat{\mathbf{i}}_1 - 2\hat{\mathbf{i}}_2 + 2\hat{\mathbf{i}}_3$ sono paralleli.
Esercizio: Si può mostrare che, a meno del segno, il valore del prodotto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è pari al volume del parallelepipedo individuato dai vettori stessi. Mostrare che i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ed $\mathbf{u}_1$ dell'esercizio precedente non sono complanari (non giacciono cioè nello stesso piano). Determinare successivamente un valore per il numero λ in modo tale che il vettore $\mathbf{u}_3 = 2\hat{\mathbf{i}}_1 - \hat{\mathbf{i}}_2 + \lambda\hat{\mathbf{i}}_3$ sia complanare a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
Esercizio: Dati in un sistema di riferimento cartesiano i punti $A = (1, 2, 1)$ e $B = (3, 2, 2)$, calcolare la proiezione del vettore $B - A$ sul vettore $3\hat{\mathbf{i}}_1 + 2\hat{\mathbf{i}}_2 + 2\hat{\mathbf{i}}_3$.
Esercizio: Dimostrare il teorema di Carnot: in ogni triangolo, il quadrato della misura di un lato è pari alla somma dei quadrati delle misure degli altri due lati, meno il loro doppio prodotto moltiplicato per il coseno dell'angolo tra

essi compreso.
Esercizio: Calcolare l'angolo formato dai vettori $\mathbf{v}_1 = \frac{7\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{i}}_1 + \frac{7}{2}\hat{\mathbf{i}}_2$ e $\mathbf{v}_2 = \hat{\mathbf{i}}_1 + \sqrt{3}\hat{\mathbf{i}}_2$.
Esercizio: Verificare le seguenti uguaglianze:

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} \\
&(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \\
&(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{z})
\end{aligned}
$$

1.4 Funzioni vettoriali.

Se le componenti cartesiane di un vettore $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ dipendono da un parametro ξ, allora

$$\mathbf{u}(\xi) = (u_x(\xi), u_y(\xi), u_z(\xi))$$

è chiamata funzione vettoriale (o funzione a valori vettoriali). Il parametro ξ ovviamente potrebbe rappresentare una coordinata spaziale, il tempo ecc.. Lo stesso dicasi per i vettori applicati. Ad esempio, se fissiamo un sistema di riferimento con origine in O, il vettore posizione di un oggetto che si sposta sarà una funzione del tempo: se $\mathbf{u} = P - O$ è il vettore in questione, chiaramente avremo $\mathbf{u} = (u_x(t), u_y(t), u_z(t))$. Già da questo semplice esempio si può capire che le funzioni vettoriali hanno importanti applicazioni alle curve nello spazio, poichè la traiettoria di un oggetto che si sposta descrive esattamente una curva che quindi è possibile descrivere tramite una funzione vettoriale. Prima di vedere queste applicazioni, chiariamo alcuni concetti di calcolo delle funzioni vettoriali.

Regole di derivazione.

Le regole di derivazione delle funzioni scalari si estendono in maniera naturale alle funzioni vettoriali. Nel seguito λ è una funzione scalare del parametro ξ, cioè $\lambda(\xi) \in \mathbb{R}$, mentre $\mathbf{u}(\xi)$ e $\mathbf{v}$ sono funzioni vettoriali del parametro ξ. Abbiamo:

$$\frac{d}{d\xi}(\lambda \mathbf{u}) = \frac{d\lambda}{d\xi}\mathbf{u} + \lambda \frac{d\mathbf{u}}{d\xi}, \tag{4a}$$

$$\frac{d}{d\xi}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\xi}, \tag{4b}$$

$$\frac{d}{d\xi}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \frac{d\mathbf{v}}{d\xi}. \tag{4c}$$

Utilizzando la (4a) possiamo scrivere la derivata di un vettore in coordinate cartesiane:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left(u_x \hat{\mathbf{i}}_1 + u_y \hat{\mathbf{i}}_2 + u_z \hat{\mathbf{i}}_3\right) = \frac{du_x}{d\xi}\hat{\mathbf{i}}_1 + \frac{du_y}{d\xi}\hat{\mathbf{i}}_2 + \frac{du_z}{d\xi}\hat{\mathbf{i}}_3 \tag{5}$$

Di particolare interesse è la derivata di un *versore*. Ricordiamo che un versore è un vettore di modulo pari a 1, quindi il modulo è costante. Il modulo al quadrato anche sarà costante. Ricordando che il modulo al quadrato di un qualsiasi vettore $\mathbf{u}$ è dato dal prodotto scalare del vettore per se stesso, avremo per un versore:

$$\frac{d(|\mathbf{u}|^2)}{d\xi} = \frac{d(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) = \frac{d(1)}{d\xi} = 0. \tag{6}$$

Ma dall'equazione (4b) abbiamo

$$\frac{d(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})}{d\xi} = \frac{d\mathbf{u}}{d\xi}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{d\xi} = 2\frac{d\mathbf{u}}{d\xi}\cdot\mathbf{u}. \tag{7}$$

Le equazioni (6) e (7) ci dicono che la derivata di un versore ed il versore stesso sono ortogonali tra loro. Allo stesso modo si può verificare che la derivata di un vettore costante in modulo è sempre ortogonale al vettore stesso.
Spesso nelle applicazioni fisiche capita che un vettore $\mathbf{u}(\xi)$ sia una funzione composta, cioè che le componenti dipendano dal parametro ξ tramite una funzione (scalare) $f(\xi)$. Avremo cioè $\mathbf{u} = \mathbf{u}\,(f(\xi)) = u_x((f(\xi)))\hat{\mathbf{i}}_1 + u_y((f(\xi)))\hat{\mathbf{i}}_2 + u_z((f(\xi)))\hat{\mathbf{i}}_3$. In questo caso basta applicare la regola di

derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} &= \frac{du_x}{df}\frac{df}{d\xi}\hat{\mathbf{i}}_1 + \frac{du_y}{df}\frac{df}{d\xi}\hat{\mathbf{i}}_2 + \frac{du_z}{df}\frac{df}{d\xi}\hat{\mathbf{i}}_3 = \\ &= \frac{df}{d\xi}\left(\frac{du_x}{df}\hat{\mathbf{i}}_1 + \frac{du_y}{df}\hat{\mathbf{i}}_2 + \frac{du_z}{df}\hat{\mathbf{i}}_3\right) = \frac{df}{d\xi}\frac{d\mathbf{u}}{df}. \end{aligned} \tag{8}$$

Esercizio: Calcolare la derivata prima e seconda della seguente funzione vettoriale $\mathbf{u}(\xi) = 3\xi^3\hat{\mathbf{i}}_1 + \xi^2\hat{\mathbf{i}}_2 + 4\hat{\mathbf{i}}_3$.
Esercizio: Verificare che il vettore $\mathbf{u} = \cos(2t)\hat{\mathbf{i}}_1 + \sin(2t)\hat{\mathbf{i}}_2$ ha modulo costante. Successivamente calcolare la derivata di $\mathbf{u}$ rispetto a t e verificare che $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ e $\mathbf{u}$ sono ortogonali. Infine verificare che $\mathbf{u} \wedge \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{c}$, dove $\mathbf{c}$ è un vettore costante.
Esercizo: Sia $w(t)$ una funzione reale del tempo. Verificare che il vettore $\mathbf{u} = \cos(w(t))\hat{\mathbf{i}}_1 + \sin(w(t))\hat{\mathbf{i}}_2$ ha modulo costante. Successivamente calcolare la derivata di $\mathbf{u}$ rispetto a t e verificare che $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ e $\mathbf{u}$ sono ortogonali.
Esercizio: Data la funzione scalare $\lambda = 3\xi^2$ e la funzione vettoriale $\mathbf{u}(\xi) = \xi\hat{\mathbf{i}}_1 + \xi^2\hat{\mathbf{i}}_2 + \xi^3\hat{\mathbf{i}}_3$, calcolare $\frac{d}{d\xi}(\lambda\mathbf{u})$ e $\frac{d}{d\xi}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})$.

Applicazioni alla geometria delle curve.

In ogni istante, un punto che si muove nello spazio definisce un vettore posizione coincidente con le coordinate del punto in quell'istante. Se indichiamo con $\mathbf{x}$ il vettore posizione, le coordinate saranno funzioni del tempo, cioè avremo

$$\mathbf{x} = x(t)\hat{\mathbf{i}}_1 + y(t)\hat{\mathbf{i}}_2 + z(t)\hat{\mathbf{i}}_3. \tag{9}$$

La precedente equazione definisce, dal punto di vista geometrico, una *curva*. Dato un intervallo di tempo $I = (t_1, t_2)$, l'immagine di questo intervallo definita dalla curva determina una *traiettoria*. La traiettoria è quindi l'insieme delle posizioni assunte dal punto durante il suo moto nel dato intervallo di tempo. Essa è un ente geometrico indipendente dalla variabile temporale e quindi può essere descritta in maniera puramente geometrica, senza far ricorso alla legge temporale con la quale la curva è percorsa dal punto. In maniera più intuitiva possiamo dire che data una curva, questa può essere percorso in diversi modi, con diverse velocità, ma la traiettoria che il punto percorre è sempre la stessa. Visto che una traiettoria è un ente uno-dimensionale, avremo bisogno di un solo parametro per descriverla. Il parametro più semplice (e più utile) è l'*ascissa curvilinea*. Dato un punto di riferimento O_1 sulla traiettoria, un qualsiasi altro punto P sulla traiettoria è univocamente definito dalla distanza, <u>misurata sulla traiettoria</u>, di P da O_1 (la distanza è positiva se P è a destra di O_1, negativa se a sinistra). Se il parametro s misura questa distanza, allora diremo che s è l'ascissa curvilinea che parametrizza la curva. Quindi la stessa traiettoria sarà definita dalla curva

$$\boldsymbol{\psi}(s) = \psi_1(s)\hat{\mathbf{i}}_1 + \psi_2(s)\hat{\mathbf{i}}_2 + \psi_3(s)\hat{\mathbf{i}}_3. \tag{10}$$

Di solito una traiettoria è data in termini della funzione temporale, cioè quello che si conosce è la funzione $\mathbf{x}(t)$. Nasce quindi il problema di trovare la s. Dai corsi di analisi sappiamo che la lunghezza di una curva descritta dal vettore $\mathbf{f}(\lambda) = (f_1(\lambda), (f_2(\lambda), (f_3(\lambda))$ è definita nell'intervallo (λ_0, λ_1) è data da

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left| \frac{d\mathbf{f}}{d\lambda} \right| d\lambda.$$

Nel nostro caso quindi avremo (al tempo t_0 il punto è in O_1, al tempo t è in P)

$$\begin{aligned} s(t) = & \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau} \right| d\tau = \\ = & \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dz(\tau)}{d\tau} \right)^2} d\tau. \end{aligned} \tag{11}$$

Questa formula definisce s come funzione del tempo t. Se nel dominio di interesse $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ non è mai nullo, allora da (11) abbiamo che $\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau} \right| > 0$ e quindi essendo questa funzione strettamente crescente è iniettiva e invertibile. La funzione inversa $t = t(s)$ definisce il tempo come una funzione di s: adesso possiamo sostituire questa funzione nell'equazione (9) ed ottenere la parametrizzazione (10), cioè $\boldsymbol{\psi}(s) = \mathbf{x}(t(s))$.

Esercizio: Un punto si muove su una circonferenza di raggio R. La sua posizione è descritta in ogni istante t dalla curva $\mathbf{x}(t) = R\cos(\alpha t)\hat{\mathbf{i}}_1 + R\sin(\alpha t)\hat{\mathbf{i}}_2$, dove α è una costante. Trovare l'ascissa curvilinea s e parametrizzare la circonferenza tramite l'ascissa curvilinea.

Data la curva $\boldsymbol{\psi}(s)$, è possibile definire il vettore tangente alla curva in un punto dato. Di nuovo, dai corsi di analisi sappiamo che il vettore tangente ad una curva parametrizzata da un certo parametro è proporzionale alla derivata della curva rispetto al parametro. Quindi nel nostro caso dobbiamo calcolare $\frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds}$. È però facile mostrare che $\frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds}$ è un versore, in quanto ha modulo pari a 1. Infatti

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\psi}(s)}{ds}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{\psi}(s(t))}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \frac{\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|}{\dot{s}} = 1$$

dove abbiamo utilizzato la definizione di s (11). Il versore tangente alla curva di solito viene indicato con la lettera $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds} \tag{12}$$

ed è ovviamente anch'esso una funzione di s, cioè del punto sulla curva. Il versore $\mathbf{T}$ definisce automaticamente un versore ad esso perpendicolare. Infatti abbiamo (si veda la discussione dopo l'equazione (7))

$$2\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(|\mathbf{T}|^2\right) = 0. \tag{13}$$

Non è detto che il vettore $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ abbia modulo unitario, anzi è possibile che il modulo anche sia una funzione di s. Per tutti i punti in cui $\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| \neq 0$, possiamo definire un versore ortogonale a $\mathbf{T}$ dividendo $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ per il suo modulo. Questo versore viene spesso indicato con la lettera $\mathbf{N}$ e viene chiamato versore *normale*:

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|}. \tag{14}$$

La quantità $k = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$ viene chiamata *curvatura* della curva, mentre il suo inverso $\rho = 1/k$ è detto *raggio di curvatura* della curva. Possiamo anche riscrivere l'equazione (16) come

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}. \tag{15}$$

I versori $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$ a loro volta definiscono un versore ad essi perpendicolare tramite il loro prodotto vettoriale. Tale versore, indicato con la lettera $\mathbf{B}$, viene chiamato versore *binormale*

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N}. \tag{16}$$

La terna di versori $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ è detta *terna intrinseca* della curva. La possiamo immaginare come una terna di assi ortogonali con origine sul punto e che si muove insieme con esso. Per chiarirne il significato fisico, possiamo guardare alla cinematica del punto.
Consideriamo quindi un punto che muove su una curva e le cui coordinate sono date da

$$\mathbf{x} = x(t)\hat{\mathbf{i}}_1 + y(t)\hat{\mathbf{i}}_2 + z(t)\hat{\mathbf{i}}_3. \tag{17}$$

La stessa traiettoria abbiamo detto che può essere parametrizzata dalla coordinata curvilinea $s(t)$. La velocità $\mathbf{v}$ del punto è definita come la derivata di $\mathbf{x}$ rispetto al tempo e possiamo scrivere

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\mathbf{T}. \tag{18}$$

Dove abbiamo utilizzato le equazioni (10) e (12). Quindi il versore $\mathbf{T}$ non è altro che il versore della velocità del punto. A questo punto è semplice anche calcolare l'accelerazione $\mathbf{a}$ del punto

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\mathbf{T}) = \ddot{s}\mathbf{T} + \dot{s}\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \\ = \ddot{s}\mathbf{T} + \dot{s}^2\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \ddot{s}\mathbf{T} + k\dot{s}^2\mathbf{N}, \end{aligned} \tag{19}$$

dove abbiamo utilizzato la (15) per la derivata di $\mathbf{T}$ rispetto a s. L'accelerazione è quindi la somma di due termini, il primo, chiamato *accelerazione tangenziale*, è $\ddot{s}\mathbf{T}$ ed ha la stessa direzione della velocità; il secondo, chiamato *accelerazione centripeta*, è $\dot{s}^2\mathbf{N}$ ed ha la stessa direzione della normale $\mathbf{N}$. Si noti che sia la velocità che l'accelerazione sono sempre perpendicolari al versore binormale $\mathbf{B}$.

Prima di chiudere questa sezione, ci poniamo il problema di stabilire se, data la curvatura o il raggio di curvatura di una curva in ogni suo punto, cioè data la funzione $k(s)$ definita in (15), sia possibile determinare univocamente la curva. La risposta è negativa, nel senso che abbiamo bisogno di conoscere un'altra quantità, chiamata *torsione*, grazie alla quale possiamo chiudere un sistema di equazioni differenziali per la terna intrinseca, chiamate equazioni di *Frenet-Serret*. La soluzione del sistema definisce la triade $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$. La prima equazione differenziale è la (15). Per ottenere le altre, notiamo che poichè $\mathbf{B}$ è un versore, abbiamo

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Inoltre $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ sono ortogonali, quindi derivando l'uguaglianza $\mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = 0$ otteniamo

$$k\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} + \vec{T} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \vec{T} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} = 0.$$

Le precedenti due equazioni ci dicono che $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ è ortogonale sia a $\mathbf{B}$ che a $\mathbf{T}$: questo implica che $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ ha la stessa direzione di $\mathbf{N}$, cioè possiamo scrivere $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \tau(s)\mathbf{N}$, dove τ è una funzione scalare.

Esercizio: giustificare l'affermazione appena fatta "questo implica che $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ ha la stessa direzione di $\mathbf{N}$".

La funzione $\tau(s)$ è la torsione della curva. Si può mostrare che se una curva giace in un piano, la sua torsione è nulla. In effetti possiamo pensare che la torsione misuri di quanto la curva si discosti dall'essere una curva piana (così come la curvatura misura di quanto la curva si discosta dall'essere una retta). L'equazione $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \tau(s)\mathbf{N}$ è la terza equazione differenziale di Frenet-Serret, manca l'equazione per $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$. Poichè $\mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T}$ (che segue da $\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N}$), se deriviamo rispetto a s otteniamo,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{N}}{ds} &= \frac{d\mathbf{B}}{ds} \wedge \mathbf{T} + \mathbf{B} \wedge \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \\ &= \tau\mathbf{N} \wedge \mathbf{T} + \mathbf{B} \wedge k\mathbf{N} = -\tau\mathbf{B} - k\mathbf{T}.\end{aligned}$$

Le equazioni di Frenet-Serret sono allora

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = k(s)\mathbf{N}, & (20a) \\ \dfrac{d\mathbf{N}}{ds} = -k(s)\mathbf{T} - \tau(s)\mathbf{B}, & (20b) \\ \dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = \tau(s)\mathbf{N}. & (20c) \end{cases}$$

Esercizio: Un punto si muove su una circonferenza di raggio R. La sua posizione è descritta in ogni istante t dalla curva $\mathbf{x}(t) = R\cos(\alpha t)\hat{\mathbf{i}}_1 + R\sin(\alpha t)\hat{\mathbf{i}}_2$, dove α è una costante. Verificare che la terna intrinseca è data da $\mathbf{T} = -\sin\left(\frac{s}{R}\right)\hat{\mathbf{i}}_1 + \cos\left(\frac{s}{R}\right))\hat{\mathbf{i}}_2$, $\mathbf{N} = -\cos\left(\frac{s}{R}\right)\hat{\mathbf{i}}_1 - \sin\left(\frac{s}{R}\right))\hat{\mathbf{i}}_2$, $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}}_3$. La curva giace nel piano (x,y): quanto è la torsione? Giustifica la risposta anche con i calcoli.

Esercizio: Un punto si muove su un'elica circolare di raggio R e passo $2\pi h$. La sua posizione è descritta in ogni istante t dalla curva $\mathbf{x}(t) = R\cos(\alpha t)\hat{\mathbf{i}}_1 + R\sin(\alpha t)\hat{\mathbf{i}}_2 + h\alpha t\hat{\mathbf{i}}_3$, dove α è una costante. Dopo aver determinato l'ascissa curvilinea s, trovare la terna intrinseca $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$, la curvatura k e la torsione τ.

1.5 Vettori applicati e sistemi di vettori applicati.

Abbiamo già introdotto matematicamente i vettori applicati nelle pagine precedenti. Dal punto di vista fisico, la necessità di introdurre i vettori applicati nasce dal fatto che diverse grandezze fisiche, come ad esempio le forze o la quantità di moto, devono essere rappresentate necessariamente tramite vettori applicati. L'esempio lampante per capirne il motivo è dato da una trave omogenea pesante in equilibrio su un piccolo supporto posto nel suo mezzo: se applico una forza verso il basso su un punto della trave esattamente sopra il supporto, la trave rimane in equilibrio. Se invece la applico ad una delle estremità della trave, essa inizierà a ruotare: l'effetto della stessa forza sullo stesso sistema è diverso a seconda del punto al quale essa è applicata. Per di più, per quantificare la velocità di rotazione della trave, sarà necessario introdurre una quantità legata alla forza chiamata *momento* della forza. Per adesso, prescindendo da altre considerazioni fisiche, vedremo proprietà e caratteristiche di vettori applicati, sistemi di vettori applicati e relativi momenti che risulteranno molto utili in seguito.

Dato un vettore applicato $(\mathbf{u}, A)$ ed un punto O nello spazio, si definisce come *momento* del vettore $(\mathbf{u}, A)$ il vettore

$$\mathbf{M}_O = (A - O) \wedge \mathbf{u}. \tag{21}$$

Il punto O viene chiamato *polo* ed è l'origine del vettore $A - O$. Dalla definizione vediamo che il vettore $\mathbf{M}_O$ è perpendicolare al piano che passa per O e contenente il vettore $(\mathbf{u}, A)$. Possiamo poi dire che $\mathbf{M}_O$ è nullo o quando il polo O coincide con il punto di applicazione A del vettore oppure quando $A-O$ è parallelo ad $\mathbf{u}$ (a parte il caso ovvio $\mathbf{u} = 0$).

Come si vede dalla definizione, il momento dipende sia dalla posizione del polo, sia dal punto in cui il vettore è applicato. Tuttavia, se si fa scorrere il polo lungo una retta parallela a $\mathbf{u}$, il valore di $\mathbf{M}_O$ non cambia. Infatti possiamo sempre scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= (A - O) \wedge \mathbf{u} = (A - O' + O' - O) \wedge \mathbf{u} = \\ &= (A - O') \wedge \mathbf{u} + (O' - O) \wedge \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Nel caso in cui $O' - O$ è parallelo ad $\mathbf{u}$ avremo $(O' - O) \wedge \mathbf{u} = 0$ e quindi $\mathbf{M}_O = (A - O') \wedge \mathbf{u}$.

Il modulo del momento $\mathbf{M}_O$ è dato da

$$|\mathbf{M}_O| = |\mathbf{u}||A - O| \sin(\theta) = |\mathbf{u}| b$$

dove la quantità $b = |A - O| \sin(\theta)$ è detto *braccio* del vettore $\mathbf{u}$ rispetto al polo O.

Il *momento assiale* del vettore $(\mathbf{u}, A)$ rispetto ad una retta orientata con versore $\hat{\mathbf{r}}$ è definito dalla quantità scalare

$$M_r = ((A - O) \wedge \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{r}}, \tag{22}$$

dove O adesso è un qualsiasi punto sulla retta. La definizione non dipende da quale punto O si sceglie sulla retta: infatti se O' è un qualsiasi altro punto sulla stessa retta, allora $O - O'$ è parallelo a $\hat{\mathbf{r}}$. Ma $(A - O) \wedge \mathbf{u} = (A - O') \wedge \mathbf{u} + (O' - O) \wedge \mathbf{u}$, ed essendo il prodotto vettoriale $(O' - O) \wedge \mathbf{u}$ perpendicolare ad $O' - O$ (e quindi perpendicolare a $\hat{\mathbf{r}}$), prendendo il prodotto scalare con $\hat{\mathbf{r}}$ questo contributo si annulla. Per capire quando è che il momento assiale di un vettore applicato si annulla, bisogna ricordare che, dati tre qualsiasi vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, il valore del prodotto misto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è pari al volume del parallelepipedo da essi individuato. Affinchè il prodotto misto sia zero c'è bisogno che tale volume si azzeri, il che è possibile solo se i tre vettori sono complanari. Possiamo allora affermare che M_r in (22) è nullo se $A - O$, $\mathbf{u}$ e $\hat{\mathbf{r}}$ sono complanari (in realtà è sufficiente che $\mathbf{u}$ e $\hat{\mathbf{r}}$ siano complanari).

Sistemi di vettori applicati

Nelle applicazioni sono frequenti i problemi in cui bisogna trattare con un insieme di vettori applicati piuttosto che con un semplice vettore applicato. Per di più è frequente il caso in cui bisogna trattare con un numero *infinito* di vettori applicati, distribuiti con continuità su un sistema. Basta pensare all'azione del vento su una parete, oppure della neve su un tetto o ancora alla spinta dell'acqua sulla parete di una diga. È utile allora studiare le proprietà dei sistemi di vettori e, se possibile, capire come ridurre il numero delle variabili da considerare per risolvere il problema. Nel seguito considereremo un numero finito di vettori applicati, ma avendo presente che si può generalizzare al caso infinito.

Indicheremo nel seguito con Σ un insieme di N vettori applicati, $\Sigma = (\mathbf{u}_k, A_k)$, $k = 1 \dots N$. Il *risultante* del sistema Σ è dato dalla somma

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{u}_k. \tag{23}$$

Il momento del sistema di vettori rispetto ad un polo O è dato invece da

$$\mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^{N} (A_k - O) \wedge \mathbf{u}_k. \tag{24}$$

Infine il momento assiale risultante del sistema di vettori rispetto ad un asse la cui direzione è data dal versore $\hat{\mathbf{r}}$ è definito dall'uguaglianza

$$M_u = \left(\sum_{k=1}^{N} (A_k - O) \wedge \mathbf{u}_k \right) \cdot \hat{\mathbf{r}}. \tag{25}$$

È importante sapere come varia il momento risultante $\mathbf{M}_O$ (24) se cambia il polo O. Se si scegliesse un polo O' invece di O si avrebbe

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{O'} &= \sum_{k=1}^{N} (A_k - O') \wedge \mathbf{u}_k = \\ &= \sum_{k=1}^{N} (A_k - O + O - O') \wedge \mathbf{u}_k, \end{aligned} \tag{26}$$

e, poichè $O - O'$ non dipende dall'indice di sommatoria, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{O'} &= \sum_{k=1}^{N} (A_k - O) \wedge \mathbf{u}_k + (O - O') \wedge \sum_{k=1}^{N} \mathbf{u}_k = \\ &= \mathbf{M}_O + (O - O') \wedge \mathbf{R}, \end{aligned} \tag{27}$$

dove $\mathbf{R}$ è definito dalla (23). La precedente è chiamata anche *legge di variazione dei momenti* e ci dice che il momento del sistema di vettori rispetto ad O' è uguale al momento del sistema rispetto al polo O, più il momento, nel polo O', del risultante $\mathbf{R}$ pensato applicato in O.

Esercizio: mostrare che il momento di un sistema di vettori applicati non dipende dalla scelta del polo O se e solo se il risultante $\mathbf{R}$ del sistema di vettori è nullo.

Sistemi di vettori applicati equivalenti.

Diremo che due sistema di vettori applicati sono *equivalenti* se hanno lo stesso risultante e lo stesso momento rispetto ad un polo O. Questa definizione non dipende dalla scelta che si fa del polo O: infatti se due sistemi sono equivalenti rispetto ad un polo O, lo sono anche rispetto a un qualsiasi altro polo O'. Per verificarlo basta applicare la legge di variazione dei momenti (27): i momenti $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ rispetto al polo O' saranno:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{O'} &= \mathbf{M}_O + (O - O') \wedge \mathbf{R}, \\ \mathbf{N}_{O'} &= \mathbf{N}_O + (O - O') \wedge \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{28}$$

Ma per ipotesi abbiamo $\mathbf{M}_O = \mathbf{N}_O$. La (28) implica allora $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{N}_{O'}$. Da questo risultato è semplice mostrare il seguente teorema, detto *teorema di Varignon*:

Un sistema di vettori Σ applicati nello stesso punto, o aventi le rette d'azione che si incontrano tutte nello stesso punto O, è equivalente ad un singolo vettore applicato $(\boldsymbol{R}, O)$.

Infatti il sistema Σ, avendo le rette di applicazione tutte passanti per O, è tale che $\mathbf{M}_O = 0$. Per definizione di sistemi equivalenti si avrà che Σ è equivalente a $(\mathbf{R}, O)$, dove $\mathbf{R}$ è il risultante del sistema Σ.

Esercizio: mostrare che due vettori applicati $(\mathbf{u}_1, A_1)$ e $(\mathbf{u}_2, A_2)$ sono equivalenti se e solo se $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ ed $A_1 - A_2$ è parallelo a $\mathbf{u}_1$ (cioè i vettori hanno la stessa retta di applicazione).

Introduciamo un caso notevole di sistema di vettori: la *coppia.* Una coppia è un sistema formato da due vettori il cui risultante è nullo. Se $(\mathbf{u}_1, A_1)$ e $(\mathbf{u}_2, A_2)$ sono i due vettori, necessariamente avremo $\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_1$. Poichè il risultante è nullo, il momento non dipende dalla scelta del polo. Scegliamo come polo il punto A_1: il momento sarà dato da $\mathbf{M} = (A_1 - A_2) \wedge \mathbf{u}_1$. Il modulo del momento allora è semplicemente $|\mathbf{M}| = |\mathbf{u}_1|b$ dove b è la distanza tra le rette di applicazione dei vettori ed è chiamato *braccio* della coppia. Ne segue che una coppia di vettori non nulli ha momento nullo se e solo se il braccio è nullo. Se un sistema ha momento e risultante entrambi nulli, si dice che il sistema è *equilibrato*, oppure *in equilibrio* o anche *equivalente a zero.* Quindi una coppia di braccio nullo è *equilibrata.*
Esercizio: mostrare che se un sistema di tre vettori appli-

cati è equilibrato, allora necessariamente i tre vettori sono complanari ed hanno rette di azione che si intersecano in un punto.

Evidentemente non è sempre possibile che un sistema di vettori applicati sia in equilibrio. Se pensiamo alle applicazioni fisiche alla statica, possiamo pensare che se un corpo deve essere in equilibrio, bisognerà in generale applicare una forza ed un momento esterni in modo da equilibrare le forze ed i momenti che agiscono sul corpo. È fondamentale allora chiedersi qual è il luogo dei punti dello spazio rispetto ai quali il momento di un sistema di vettori è minimo: se da una parte questo implica che bisognerà applicare un momento minimo per garantire l'equilibrio, dall'altra parte le sollecitazioni su eventuali strutture di sostegno, come ad esempio cerniere o incastri, saranno minime. Per rispondere a questa domanda dobbiamo guardare alla legge di variazione dei momenti (27)

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + (O - O') \wedge \mathbf{R}. \tag{29}$$

Da questa vediamo che se moltiplichiamo scalarmente entrambi i membri per il risultante $\mathbf{R}$, otteniamo una quantità che è indipendente dal polo scelto poichè $((O - O') \wedge \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} = 0$. Definiamo allora l'*invariante scalare* I come la quantità

$$I = \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}, \tag{30}$$

dove non abbiamo indicato il polo con il pedice per sottolineare che il valore di I non dipende dalla scelta di O. Il passo successivo è notare che il momento $\mathbf{M}$ rispetto ad un polo O può essere sempre scomposto in due componenti, una parallela ad $\mathbf{R}$ e l'altra perpendicolare ad essa:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_O^{\perp} + \mathbf{M}^{\parallel}. \tag{31}$$

Si noti che di nuovo non c'è il pedice su $\mathbf{M}^{\parallel}$ perchè questa componente non dipende dal polo O. Siamo riusciti a scrivere $\mathbf{M}$ come la somma di due componenti, una indipendente dalla scelta del polo ($\mathbf{M}^{\parallel}$) e l'altra dipendente dal polo ($\mathbf{M}_O^{\perp}$). Il modulo quadro del vettore $\mathbf{M}_O$, essendo le due componenti tra loro ortogonali, è

$$|\mathbf{M}_O|^2 = \left|\mathbf{M}_O^{\perp}\right|^2 + \left|\mathbf{M}^{\parallel}\right|^2, \tag{32}$$

e per renderlo minimo dobbiamo minimizzare il contributo di $\mathbf{M}_O^{\perp}$. Adesso mostreremo che esiste una retta, chiamata *asse centrale*, i cui punti hanno la caratteristica che, se presi come polo per calcolare il momento del sistema, risulta $\mathbf{M}_O^{\perp} = \mathbf{0}$. Evidentemente i punti di questa retta minimizzano il modulo del momento $\mathbf{M}_O$. È necessario trovare i punti O' tali che $\mathbf{M}_{O'}$ è parallelo ad $\mathbf{R}$, cioè i punti per i quali $\mathbf{M}_{O'} \wedge \mathbf{R} = 0$. Utilizzando la legge di variazione dei momenti abbiamo

$$\mathbf{M}_{O'} \wedge \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \wedge \mathbf{R} + ((O - O') \wedge \mathbf{R}) \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (33)$$

L'uguaglianza vettoriale $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$ ci permette di scrivere

$$\mathbf{M}_O \wedge \mathbf{R} + ((O - O') \cdot \mathbf{R})\,\mathbf{R} - (O - O')R^2 = \mathbf{0}. \quad (34)$$

da cui otteniamo il vettore $O' - O$

$$O' - O = \lambda(O')\mathbf{R} - \frac{\mathbf{M}_O \wedge \mathbf{R}}{R^2}, \quad (35)$$

dove abbiamo posto $\lambda(O') = \frac{(O'-O)\cdot\mathbf{R}}{R^2}$. Si noti che questa è una retta parallela ad $\mathbf{R}$: infatti se O'_1 ed O'_2 sono due punti che verificano la (35) allora $O'_1 - O'_2 = \eta\mathbf{R}$, dove $\eta = \lambda(O'_1) - \lambda(O'_2)$.

Per riassumere possiamo allora affermare che l'insieme dei punti che, scelti come polo, rendono minimo il modulo del momento di un sistema Σ, è dato da una retta parallela ad $\mathbf{R}$ chiamata asse centrale e la cui equazione è la (35).

Dalle argomentazioni fatte in precedenza possiamo trarre ancora diverse conclusioni. Supponiamo che un sistema Σ sia tale che il suo invariante scalare $I = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}$ sia nullo. Allora dalla (31) vediamo che $\mathbf{M}^{\parallel} \cdot \mathbf{R} = 0$. Ma $\mathbf{M}^{\parallel}$ è la parte di $\mathbf{M}$ parallela ad $\mathbf{R}$, cioè $\mathbf{M}^{\parallel} = \mu\mathbf{R}$ per una certa costante μ. $\mathbf{M}^{\parallel} \cdot \mathbf{R} = 0$ implica $\mu R^2 = 0$, il che può essere verificato in due casi: o se $\mu = 0$, il che implica che $\mathbf{M}^{\parallel} = 0$ e quindi $\mathbf{M} = 0$ per i punti dell'asse centrale, oppure se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Nel primo caso il sistema è equivalente ad un solo vettore $\mathbf{R}$ applicato ad un punto dell'asse centrale, nel secondo caso il sistema è equivalente ad una coppia di momento $\mathbf{M}_O$ pari al momento risultante del sistema.

Rimane da analizzare il caso in cui l'invariante scalare del sistema sia diverso da zero. È lasciato al lettore verificare che il sistema è riducibile ad un vettore $\mathbf{R}$ applicato in un arbitrario punto O più una coppia di momento $\mathbf{M}_O$ pari a quello del sistema.

La tabella 1. riporta i differenti casi appena analizzati.

1. Tabella di massima riduzione di un sistema di vettori applicati.

$I = 0$	$\mathbf{R} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$	zero
	$\mathbf{R} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$	coppia di momento $\mathbf{M}_O$
	$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$	vettore $\mathbf{R}$ applicato in un punto qualsiasi dell'asse centrale
$I \neq 0$	$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$	vettore $\mathbf{R}$ applicato in un arbitrario polo O più coppia di momento $\mathbf{M}_O$

Sistemi di vettori piani e sistemi di vettori paralleli.

Due casi particolari ma notevoli di sistemi di vettori aventi invariante scalare nullo sono dati da un sistema di vettori piano, in cui cioè tutte le rette di applicazione giacciono nello stesso piano, e da un sistema di vettori paralleli, in cui tutte le rette di applicazione hanno la stessa direzione. Per un sistema di vettori piano, il risultante $\mathbf{R}$ giace necessariamente sul piano. Se prendiamo come polo O un punto sul piano, allora il momento $\mathbf{M}_O$ risulta perpendicolare al piano. Quindi si avrà $I = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0$. In un sistema di N vettori paralleli invece tutti i vettori sono rappresentabili come $a_k\hat{\mathbf{u}}$, $k = 1 \ldots N$, dove $\hat{\mathbf{u}}$ rappresenta la direzione comune dei vettori e gli a_k sono dei coefficienti numerici che, a meno del segno, danno il modulo dei vettori. Il momento $\mathbf{M}_O$ è somma dei singoli momenti $(A_k - O) \wedge (a_k\hat{\mathbf{u}})$ che sono tutti ortogonali ad $\hat{\mathbf{u}}$. Il risultante invece, se non è nullo, è parallelo ad $\hat{\mathbf{u}}$. Di nuovo allora $I = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0$.

Cerchiamo l'equazione dell'asse centrale per un sistema di vettori paralleli. Poichè abbiamo $\mathbf{u}_k = a_k\hat{\mathbf{u}}$, il risultante sarà

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{N} a_k\hat{\mathbf{u}} = a\hat{\mathbf{u}}$$

dove $a = \sum_k a_k$. Nel seguito supporremo che $a \neq 0$. Il momento rispetto ad un polo O è invece

$$\mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^{N} (A_k - O) \wedge (a_k\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{A} \wedge \hat{\mathbf{u}}$$

dove abbiamo indicato con $\mathbf{A}$ il vettore $\sum_k(a_k(A_k - O))$. Dall'equazione (35) vediamo che abbiamo bisogno del prodotto $\mathbf{M}_O \wedge \mathbf{R}$; esso è dato da

$$\mathbf{M}_O \wedge \mathbf{R} = (\mathbf{A} \wedge \hat{\mathbf{u}}) \wedge (a\hat{\mathbf{u}}) = a\left((\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{A}\right)$$

dove abbiamo utilizzato $|\hat{\mathbf{u}}|^2 = 1$. Mettendo tutto insieme abbiamo

$$O' - O = \lambda\hat{\mathbf{u}} + \frac{\mathbf{A}}{a}, \tag{36}$$

dove abbiamo inglobato nel parametro λ tutti i contributi proporzionali ad $\hat{\mathbf{u}}$. Questa è la retta che passa nel punto

$$C - O = \frac{\mathbf{A}}{a} = \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k(A_k - O)}{\sum_{k=1}^{N} a_k} \tag{37}$$

e che è parallela ad $\hat{\mathbf{u}}$. L'equazione della retta (36) può anche essere riscritta come

$$O' - O = C - O + \lambda\hat{\mathbf{u}}. \tag{38}$$

Il punto $C - O$ è chiamato *centro* del sistema: si noti che esso non dipende dall'orientazione del sistema di vettori, ma solamente dai punti di applicazione dei vettori e dai coefficienti a_k proporzionali ai moduli dei vettori: se quindi l'orientazione dei vettori cambia (ma non i moduli ed i punti di applicazione) l'asse centrale varia concordemente con l'orientazione ma un punto rimarrà comune a tutti gli assi centrali: questo punto è il centro del sistema. Un caso notevole di applicazione della formula (39) e che ne mette in risalto anche il significato fisico è quella di un sistema di punti sottoposto all'azione della forza gravitazionale. In questo caso le forze formano un sistema di vettori paralleli, concordi con il verso della forza di gravità. Se $\mathbf{g}$ è l'accelerazione di gravità, allora la forza alla quale è sottoposto il k-esimo punto è pari a $m_k\mathbf{g}$, dove m_k è la massa del punto. La forza è applicata esattamente nella posizione del punto. La formula (39) allora ciu dice che il centro è dato da

$$G - O = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k|\mathbf{g}|(A_k - O)}{\sum_{k=1}^{N} m_k|\mathbf{g}|} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k(A_k - O)}{\sum_{k=1}^{N} m_k}. \tag{39}$$

avendo potuto semplificare il fattore comune $\mathbf{g}$. In questo caso il centro $G-O$ viene chiamato *baricentro* del sistema di punti.

Cerchiamo invece adesso l'equazione dell'asse centrale per un sistema di vettori piano. Possiamo far coincidere il piano in cui giacciono i vettori con il piano (x, y). Il sistema di vettori è quindi dato da $(\mathbf{u}_k, A_k)$, $k = 1 \ldots N$, dove sia gli $\mathbf{u}_k$ che i punti A_k hanno la componente cartesiana z pari a zero. Il risultante $\mathbf{R}$ giace anch'esso nel piano essendo somma di vettori nel piano. Quindi possiamo scrivere

$$\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}}_1 + R_y\hat{\mathbf{i}}_2. \tag{40}$$

Il momento $\mathbf{M}_O$, se prendiamo un punto O del piano, avrà invece solo la componente cartesiana lungo z:

$$\mathbf{M}_0 = M_z\hat{\mathbf{i}}_3. \tag{41}$$

Chiaramente abbiamo $I = \mathbf{R}\cdot\mathbf{M}_O = 0$. Il vettore $\mathbf{M}_O \wedge \mathbf{R}$ è dato da $\mathbf{M}_O \wedge \mathbf{R} = M_z\left(R_x\hat{\mathbf{i}}_2 - R_y\hat{\mathbf{i}}_1\right)$. Se le coordinate di O sono (x_0, y_0), l'equazione per l'asse centrale (35) in coordinate cartesiane diventa

$$(x - x_0, y - y_0, 0) = \lambda(R_x, R_y, 0) + \frac{M_z}{R^2}(R_y, -R_x, 0), \tag{42}$$

dove $R^2 = R_x^2 + R_y^2$. Separando le componenti abbiamo due equazioni. Eliminando il parametro λ otteniamo l'equazione cartesiana per l'asse centrale:

$$(y - y_0)R_x - (x - x_0)R_y + M_z = 0. \tag{43}$$

Quindi l'asse centrale è una retta che giace anch'essa nel piano, in genere non passa per il polo O (a meno che non sia $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ ovviamente).

Esercizio: verificare che per tutti i punti O' dell'asse centrale (43) il momento $\mathbf{M}_{O'}$ del sistema di vettori piano si annulla.

Esercizi. Qui di seguito alcuni esercizi utili per fissare i concetti.

Esercizio: dato il sistema di vettori piani e paralleli $(\mathbf{v}_1, A_1)$ e $(\mathbf{v}_2, A_2)$:

$$\mathbf{v}_1 = (0,1,0), \qquad \mathbf{v}_2 = (0,-v,0),$$
$$A_1 = (1,2,0), \qquad A_2 = (2,1,0),$$

con $v \neq 1$, determinare

- Risultante e momento risultante rispetto all'origine.
- Invariante scalare.
- Equazione cartesiana dell'asse centrale.
- Valore del momento rispetto ad un punto dell'asse centrale.
- Il centro.
- Un sistema equivalente.

Verificare poi che il centro si trova sulla congiungente A_1 con A_2.

Esercizio: Dato il sistema di vettori $(\mathbf{v}, A_v)$ e $(\mathbf{u}, A_u)$:

$$\mathbf{v} = v(\cos(\theta)\hat{i}_1 + \sin(\theta)\hat{i}_2), \qquad \mathbf{u} = u(-\cos(\theta)\hat{i}_1 - \sin(\theta)\hat{i}_2),$$
$$A_v = (a,0,0), \qquad A_u = (-a,0,0),$$

con $v \neq u$, determinare

- Risultante e momento risultante rispetto all'origine.
- Equazione cartesiana dell'asse centrale

Esercizio: mostrare che un sistema di due vettori applicati concordi e paralleli è equivalente ad un unico vettore che ha come risultante la somma dei due vettori e come punto di applicazione un punto che giace sulla retta che congiunge A_1 ed A_2 nell'intervallo limitato da A_1 ed A_2 stessi (A_1 ed A_2 sono i due punti di applicazione).

Esercizio: per il sistema di vettori paralleli $\mathbf{v}_k = (0, 0, k)$ applicati in $A_k = (0, k, 0)$, $k = 1..N$, determinare

- L'equazione dell'asse centrale.
- Il centro.

Esercizio: dato il sistema di vettori

$$\begin{array}{lll} \mathbf{v}_1 = (\alpha\hat{i}_1 + \hat{i}_2), & \mathbf{v}_2 = (\alpha\hat{i}_2 + \hat{i}_3), & \mathbf{v}_3 = (\hat{i}_1 + \hat{i}_2) \\ A_1 = (1, \alpha, 0), & A_2 = (\alpha, 0, 1), & A_3 = (0, 0, k\alpha), \end{array}$$

determinare il valore dei parametri α e k affincè il valore dell'invariante scalare sia $I = -1$ e l'asse centrale passi per il punto $P = \left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$.

Esercizio: determinare il centro del seguente sistema di vettori

$$\mathbf{v}_1 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}), \qquad \mathbf{v}_2 = (2, 1, \frac{2}{3}), \qquad \mathbf{v}_3 = (3, \frac{3}{2}, 1)$$
$$A_1 = (1, 0, 0), \qquad A_2 = (0, 1, 0), \qquad A_3 = (0, 0, 1),$$