

## 12 Stima per intervalli

Anche se la precisione della stima aumenta con grandi campioni, non è vero che una stima puntuale, valore specifico di una statistica calcolata in corrispondenza di un dato campione, sia esattamente uguale al parametro della popolazione che si intende stimare.

A volte è preferibile determinare un intervallo per il quale si ha un certo **livello di fiducia** o **confidenza** che il parametro vi appartenga.

Quindi una stima per intervallo è un intervallo costruito attorno allo stimatore puntuale (di cui si conosce la distribuzione di probabilità) in modo che sia nota e fissata a priori la probabilità che il parametro vero appartenga all'intervallo stesso.

Tale probabilità è detta **LIVELLO DI CONFIDENZA** e viene indicato con  $(1 - \alpha)\%$  dove  $\alpha \in (0, 1)$  è la probabilità che il parametro si trovi al di fuori dell'intervallo di confidenza.

Nel caso di un campione casuale semplice di dimensione  $n$ , estratto da una popolazione normale  $N(\mu, \sigma^2)$  si possono costruire intervalli di confidenza al livello

$(1 - \alpha)\%$  sia per la media  $\mu$  (con  $\sigma$  nota o incognita)  
 sia per la varianza  $\sigma^2$  (con  $\mu$  nota o incognita)

① INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA  
 MEDIA  $\mu$  QUANDO LA VARIANZA  $\sigma^2$  È NOTA

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, \dots, n \Rightarrow \bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

La variabile casuale

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

è indipendente da  $\mu$  e quindi è la statistica idonea  
 per costruire l'intervallo per  $\mu$ , essendo  $\sigma$  nota.

Si possono costruire intervalli bilaterali e unilaterali  
 destro e sinistro.

INTERVALLO BILATERALE

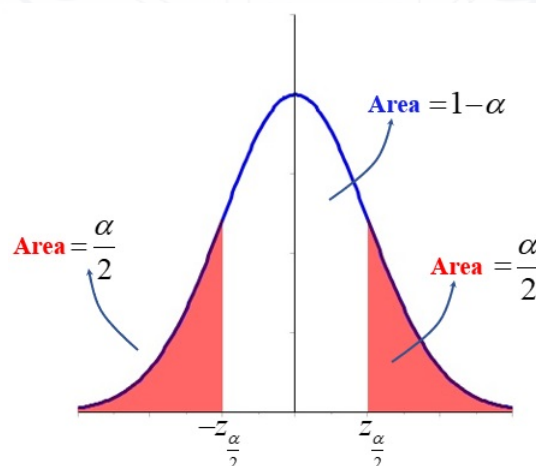


Figura 39

$$\forall \alpha \in (0, 1) \quad z_{\frac{\alpha}{2}} : P[Z_n > z_{\frac{\alpha}{2}}] = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow P[-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z_n < z_{\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \alpha$$

Sostituendo  $Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$$P[-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \alpha$$

ovvero

$$P\left[\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

$$\rightarrow I = \left( \bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{intervallo di confidenza bilat. al livello } (1-\alpha) \text{ per } \mu$$

La lunghezza dell'intervallo bilaterale è

$$l_I = 2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- se  $n$  aumenta,  $l_I$  cala  $\Rightarrow$  stima più precisa.
  - se  $(1 - \alpha)$  aumenta,  $z_{\frac{\alpha}{2}}$  aumenta,  $l_I$  aumenta  $\Rightarrow$  la stima è meno precisa.
  - se  $\sigma$  aumenta,  $l_I$  aumenta.
- $(n, \alpha)$  si possono controllare,  $\sigma$  dipende dai dati.

## INTERVALLI UNILATERALI

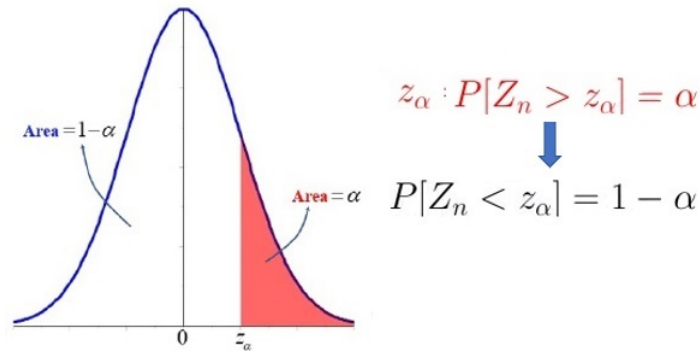


Figura 40

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_\alpha \Rightarrow \mu > \bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\rightarrow \left( \bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right) \quad \text{intervallo unilaterale destro per } \mu \text{ al livello } (1 - \alpha).$$

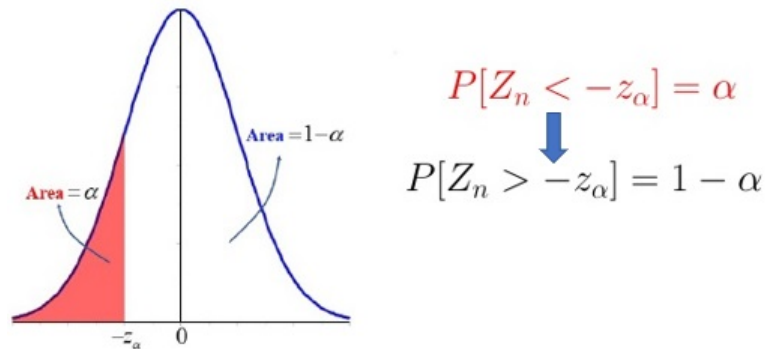


Figura 41

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > -z_\alpha \Rightarrow \mu < \bar{X}_n + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\rightarrow \left( -\infty, \bar{X}_n + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{intervallo unilaterale sinistro per } \mu \text{ al livello } (1 - \alpha).$$

## OSSERVAZIONE

Se viene a mancare l'ipotesi che la distribuzione della popolazione sia normale, a condizione che  $n$ , la dimensione del campione, sia sufficientemente grande, in accordo con il Teorema del Limite Centrale ( $n \geq 30$ )

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

e si possono costruire ugualmente gli intervalli di confidenza.

### Esempio

Vogliamo calcolare

$$\begin{aligned} P[-1.96 < Z_n < 1.96] &= \int_{-1.96}^{1.96} \varphi(z) dz = \\ &= 2 \int_0^{1.96} \varphi(z) dz = 2 \left( \int_{-\infty}^{1.96} \varphi(z) dz - 0.5 \right) = (\text{tabella}) \\ &= 2(0.975 - 0.5) = 2 \cdot 0.475 = 0.95 \end{aligned}$$

è equivalente a

$$P \left[ \bar{X}_n - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = (1 - \alpha) = 0.95$$

intervallo di confidenza bilaterale al 95% per  $\mu$ .

Il 95% delle volte  $\mu$  si troverà ad una distanza non superiore a  $(1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  dalla media campionaria dei dati.

Posso concludere che col 95% di confidenza la media  $\mu$  della popolazione appartiene ad

$$I = \left( \bar{X}_n - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$(1 - \alpha) = 0.95$$

$$\alpha = 0.05, \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$1.96 = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025}$$

Voglio calcolare:

$$P[Z_n < 1.645] = \int_{-\infty}^{1.645} \varphi(z) dz = (\text{tabella}) = 0.95$$

è equivalente a

$$P \left[ \bar{X}_n - 1.645 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu \right] = 0.95$$

intervallo di confidenza unilaterale destro al 95%,  
cioè

$$I = \left( \bar{X}_n - 1.645 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$$

$$(1 - \alpha) = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$$

L'intervallo di confidenza unilaterale sinistro al 95% sarà:

$$I = \left( -\infty, \bar{X}_n + 1.645 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

### LIVELLI DI CONFIDENZA COMUNI

$$1 - \alpha = 90\% \Rightarrow \alpha = 0.1 \quad \left\{ \begin{array}{l} z_\alpha = z_{0.1} = 1.28 \\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645 \end{array} \right.$$

$$1 - \alpha = 95\% \Rightarrow \alpha = 0.05 \quad \left\{ \begin{array}{l} z_\alpha = z_{0.05} = 1.645 \\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96 \end{array} \right.$$

$$1 - \alpha = 99\% \Rightarrow \alpha = 0.01 \quad \left\{ \begin{array}{l} z_\alpha = z_{0.01} = 2.326 \\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.58 \end{array} \right.$$

### OSSERVAZIONE

Ci possono essere diversi intervalli di confidenza bilaterali che hanno lo stesso livello di confidenza.

$$P[-1.96 < Z_n < 1.96] = 0.95$$

ma anche

$$P[-1.68 < Z_n < 2.70] = 0.95$$

**Problema:** quale intervallo è migliore?

Si sceglie l'intervallo più corto.

Si può dimostrare che l'intervallo simmetrico rispetto ad  $\bar{X}_n$  è quello che rende minima l'ampiezza dell'intervallo bilaterale  $I_{\text{bil}}$ .

Esempio

Sia dato un campione casuale di dimensione  $n = 4$ , estratto da una popolazione normale  $N(\mu, \sigma = 3)$ .

DATI: 1.2, 3.4, 0.6, 5.6

$\bar{x}_n = \bar{x}_4 = 2.7$  è la stima per  $\mu$ .

L'intervallo bilaterale simmetrico al 95% per  $\mu$  è:

$$\left( 2.7 - 1.96 \cdot \frac{3}{2}, 2.7 + 1.96 \cdot \frac{3}{2} \right) = (-0.24, 5.64)$$

e  $\ell_I = 5.88$

Se usiamo  $P[-1.68 < Z_n < 2.70] = 0.95$

ricaviamo:

$$\left( 2.7 - 2.7 \cdot \frac{3}{2}, 2.7 + 1.68 \cdot \frac{3}{2} \right) = (-1.35, 5.22)$$

e  $\ell_I = 6.57$  è più ampio

Gli intervalli unilaterali in corrispondenza a  $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$  saranno



$(0.23, +\infty)$  destro,  $(-\infty, 5.16)$  sinistro.

In alcune situazioni si richiede che l'intervallo di confidenza bilaterale abbia una lunghezza fissata.

**Problema:** determinare la numerosità del campione che garantisca il risultato richiesto.

Da  $\ell_I = 2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(2z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\ell_I}\right)^2$   
 (si approssima all'intero successivo).

Esempio

Dato un campione casuale estratto da una popolazione normale  $N(\mu, \sigma = 0.2)$ , calcolare  $n$  affinché l'intervallo di confidenza bilaterale al 99% per  $\mu$  abbia lunghezza  $\ell_I = 0.1$ .

$$1 - \alpha = 0.99, \Rightarrow \alpha = 0.01, \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.58.$$

$$\ell_I = 2 \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2.58 \cdot \frac{0.2}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{5.16 \cdot 0.2}{0.1}\right)^2 \simeq 106.5 \Rightarrow n = 107$$

## ② INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA MEDIA $\mu$ QUANDO LA VARIANZA $\sigma^2$ NON È NOTA

Non è più possibile in questo caso usare la variabile casuale  $Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  poichè contiene l'incognita  $\sigma$  e quindi non è una statistica.

Bisogna usare la statistica

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1} \quad (\text{TH. 5})$$

In analogia al caso ① si costituiscono gli intervalli di confidenza bilaterali e unilaterali destro e sinistro al livello  $(1 - \alpha)\%$ ,  $\forall \alpha \in (0, 1)$  sostituendo alla deviazione standard  $\sigma$  della popolazione la deviazione campionaria standard  $S$  e ai percentili della normale standard  $Z$  i percentili della  $t$  di Student al grado di libertà  $(n - 1)$ .

$$I = \left( \bar{X}_n - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{intervallo bilaterale per } \mu$$

$$\left( \bar{X}_n - t_{\alpha, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, +\infty \right) \quad \text{intervallo unilat. dx per } \mu$$

$$\left( -\infty, \bar{X}_n + t_{\alpha, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{intervallo unilat. sx per } \mu$$

Quando  $\sigma$  non è nota, l'intervallo costruito attraverso la  $t$  di Student è più ampio poichè le code della  $t$  sono più pesanti.

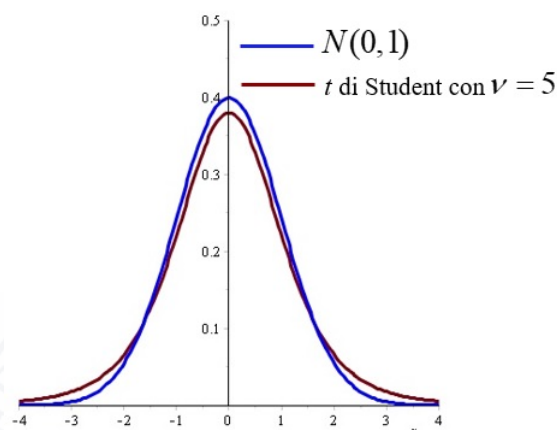


Figura 42

### Esempio

Sia dato un campione casuale di dimensione  $n = 4$  estratto da una popolazione normale  $N(\mu, \sigma^2)$ . Determinare un intervallo di confidenza bilaterale al 95% per  $\mu$ .

DATI: 1.2, 3.4, 0.6, 5.6

$$\bar{x}_n = \bar{x}_4 = 2.7$$

$$s^2 = \frac{1}{3} [(1.2)^2 + (3.4)^2 + (0.6)^2 + (5.6)^2 - 4 \cdot (2.7)^2]$$

↓

$$s \simeq 2.277$$

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0.025, 3} = (\text{tabella}) = 3.182$$

$$\ell_I = 2t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow \ell_I = 2 \cdot 3.182 \cdot \frac{2.277}{2}$$

$\Rightarrow \ell_I = 7.25$  (più ampio rispetto a 5.88 calcolato quando  $\sigma$  è nota)

### OSSERVAZIONE

Nella pratica si costruiscono gli intervalli di confidenza per  $\mu$  quando  $\sigma$  non è nota per mezzo della  $t$  di Student solo per piccoli campioni ( $n \leq 30$ ). Per grandi campioni si usa invece la normale standard  $Z_n$  sostituendo alla  $\sigma$  incognita la  $S$  calcolata dai dati.

### ③ INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA VARIANZA $\sigma^2$ QUANDO LA MEDIA $\mu$ NON È NOTATA

Una stima per  $\sigma^2$  può essere determinata usando la statistica

$$V = (n - 1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2, \quad (\text{TH. 4})$$

## INTERVALLO BILATERALE

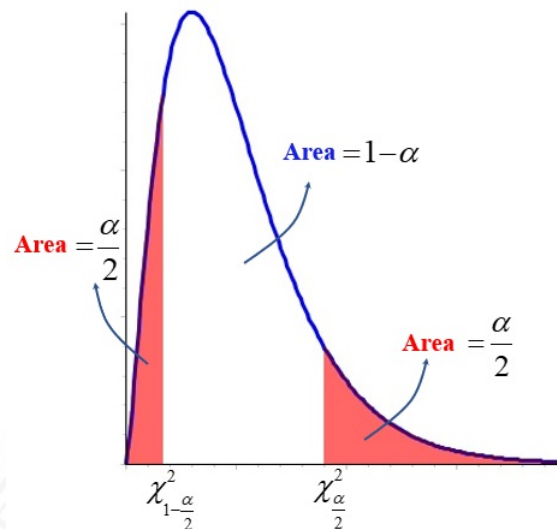


Figura 43

$$P \left[ \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 < V < \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 \right] = 1 - \alpha$$

sostituendo  $V$  si ha

$$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2$$

cioè

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \right) \text{ intervallo bilaterale per } \sigma^2 \text{ quando } \mu \text{ non è nota}$$

## INTERVALLI UNILATERALI

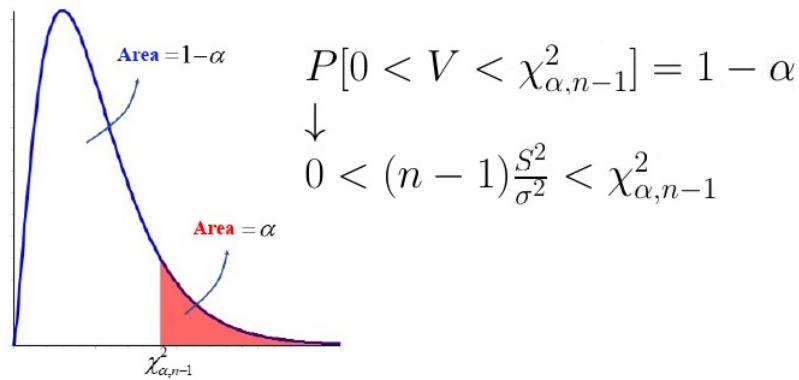


Figura 44

$$\Rightarrow \sigma^2 > (n - 1) \frac{S^2}{\chi_{\alpha, n-1}^2}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{(n - 1) S^2}{\chi_{\alpha, n-1}^2}, +\infty \right) \text{ intervallo unilaterale destro per } \sigma^2 \text{ quando } \mu \text{ non è nota}$$

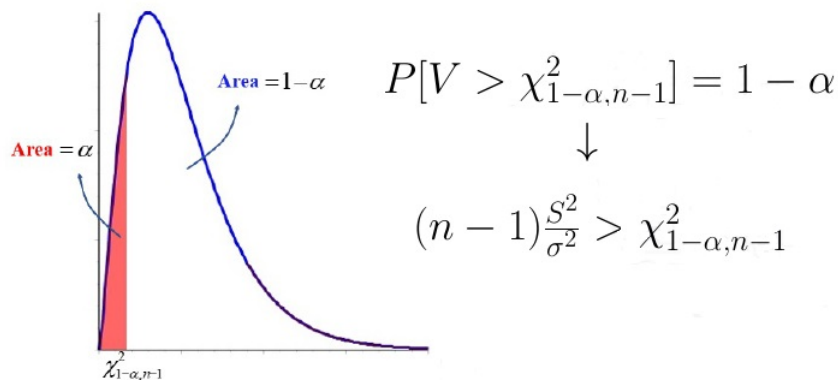


Figura 45

$$\Rightarrow \sigma^2 < (n - 1) \frac{S^2}{\chi_{1-\alpha, n-1}^2}$$

$$\Rightarrow \left( 0, \frac{(n - 1)S^2}{\chi_{1-\alpha, n-1}^2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{intervallo unilaterale} \\ \text{sinistro per } \sigma^2 \text{ quando} \\ \mu \text{ non è nota} \end{array}$$

### Esempio

Dato un campione casuale di dimensione  $n = 10$ , di rondelle di spessore ridotto, estratto da una popolazione normale  $N(\mu, \sigma^2)$ , stimare  $\sigma^2$  con  $\mu$  non nota.

DATI: spessori

0.123, 0.133, 0.124, 0.125, 0.126

0.128, 0.120, 0.124, 0.130, 0.126

$$\Rightarrow \bar{x}_n = \bar{x}_{10} = 0.125$$

$$s^2 = \frac{1}{9} [(0.123^2 + 0.133^2 + \dots + 0.126^2) - 10 \cdot 0.125^2]$$

$$\simeq 1.366 \cdot 10^{-5}$$

Vogliamo determinare un intervallo di confidenza bilaterale per  $\sigma^2$  al 90%.

$$1 - \alpha = 0.90, \alpha = 0.1, \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05, 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95$$

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 = \chi_{0.05, 9}^2 = 16.919$$

$$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 = \chi_{0.95, 9}^2 = 3.325$$

quindi

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}$$

diventa

$$\frac{9 \cdot 1.366 \cdot 10^{-5}}{16.919} < \sigma^2 < \frac{9 \cdot 1.366 \cdot 10^{-5}}{3.325}$$

$\Rightarrow (7.26 \cdot 10^{-6}, 36.97 \cdot 10^{-6})$  è l'intervallo bilaterale per  $\sigma^2$ .

#### ④ INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA VARIANZA $\sigma^2$ QUANDO LA MEDIA $\mu$ È NOTA

In questo caso si può usare la statistica

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2, \quad (\text{TH. 3})$$

e ragionare come nel caso ③, sostituendo alla statistica  $V$  la statistica  $U$  (il grado di libertà ora è  $n$ ).



$$\left( \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n}^2}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n}^2} \right) \quad \text{intervallo bilaterale per } \sigma^2 \text{ quando } \mu \text{ è nota}$$

$$\left( \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha, n}^2}, +\infty \right) \quad \text{intervallo unilaterale destro per } \sigma^2 \text{ quando } \mu \text{ è nota}$$

$$\left( 0, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha, n}^2} \right) \quad \text{intervallo unilaterale sinistro per } \sigma^2 \text{ quando } \mu \text{ è nota}$$

Intervali con livello di confidenza  $1 - \alpha$  per campioni normali.

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$\bar{X}_m := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S := \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_m)^2 \right)^{1/2}$$

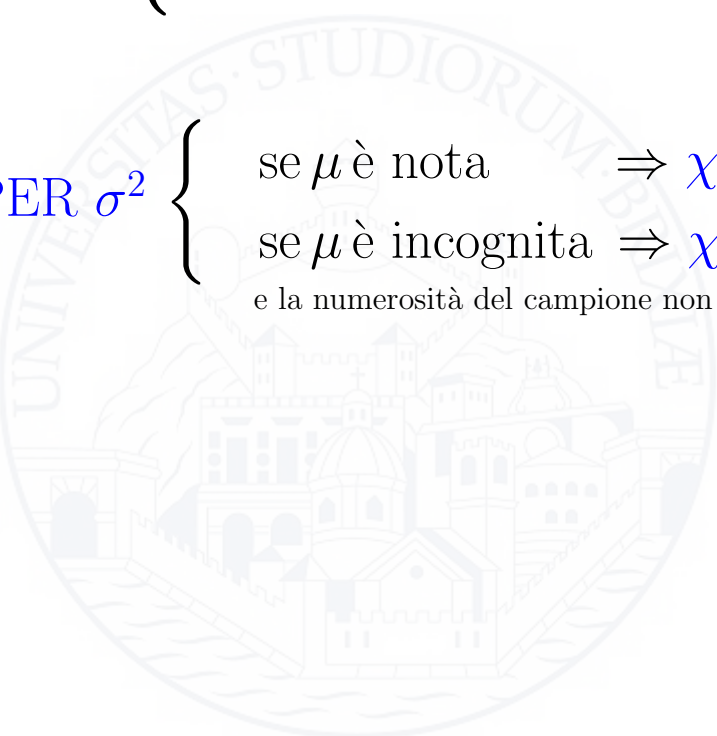
Ipotesi	$\theta$	Intervallo bilaterale	Intervallo sinistro	Intervallo destro
$\sigma^2$ nota	$\mu$	$\bar{X}_m \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$(-\infty, \bar{X}_m + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$(\bar{X}_m - z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty)$
$\sigma^2$ non nota	$\mu$	$\bar{X}_m \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$	$(-\infty, \bar{X}_m + t_{\alpha, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}})$	$(\bar{X}_m - t_{\alpha, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \infty)$
$\mu$ non nota	$\sigma^2$	$\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \right)$	$\left( 0, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha, n-1}^2} \right)$	$\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha, n-1}^2}, \infty \right)$
$\mu$ nota	$\sigma^2$	$\left( \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n}^2}, \frac{\cdot}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n}^2} \right)$	$\left( 0, \frac{\cdot}{\chi_{1-\alpha, n}^2} \right)$	$\left( \frac{\cdot}{\chi_{\alpha, n}^2}, \infty \right)$

Figura 46

## SCHEMA

STIMA PER  $\mu$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \sigma \text{ è nota} \Rightarrow N(0, 1) \\ \text{se } \sigma \text{ è incognita} \Rightarrow t_{n-1} \text{ solo per piccoli} \\ \text{campioni } n \leq 30 \\ \Rightarrow N(0, 1) \text{ per } n \geq 30 \\ \text{sostituendo} \\ \sigma \text{ con } s \end{array} \right.$

STIMA PER  $\sigma^2$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \mu \text{ è nota} \Rightarrow \chi_n^2 \\ \text{se } \mu \text{ è incognita} \Rightarrow \chi_{n-1}^2 \\ \text{e la numerosità del campione non conta} \end{array} \right.$



### Esempi

① Stimare il numero medio di battiti cardiaci al minuto di una popolazione normale  $N(\mu, \sigma = 10)$  considerando un campione casuale, di dimensione  $n = 49$ , avente  $\bar{x}_{49} = 90$ .

Determinare gli intervalli di confidenza bilaterali per  $\mu$  al 90%, 95%, 99%.

$$- (1 - \alpha) = 0.90 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05, z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645$$

$$90 - 1.645 \cdot \frac{10}{7} < \mu < 90 + 1.645 \cdot \frac{10}{7}$$

↓

$$\mu \in (87.65; 92.35)$$

$$\ell_I = 4.70$$

$$- (1 - \alpha) = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025, z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$$

$$\ell_I = 5.60$$

$$- (1 - \alpha) = 0.99 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005, z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.58$$

$$\ell_I = 7.36$$

Se  $(1 - \alpha)$  aumenta,  $\ell_I$  aumenta.

② Da una popolazione si estrae un campione di 16 oggetti di cui si misura il peso. Stimare il peso medio  $\mu$  della popolazione, sapendo che  $\bar{x}_{16} = 3.42$  grammi e  $s = 0.68$  grammi, con un livello di confidenza del 99%.

Poichè eseguo delle misure, anche se il testo non lo specifica la distribuzione della popolazione è una normale  $N(\mu, \sigma^2)$ . Bisogna stimare  $\mu$  con  $\sigma^2$  incognita.

$n = 16$  campione piccolo ( $< 30$ )

$\nu = n - 1 = 15$  gradi di libertà della  $t$  di Student

$1 - \alpha = 0.99, \frac{\alpha}{2} = 0.005$

$t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0.005, 15} = 2.947$

$$3.42 - 2.947 \cdot \frac{0.68}{4} < \mu < 3.42 + 2.947 \cdot \frac{0.68}{4}$$

$$\Rightarrow \mu \in (2.91, 3.93)$$

③ Dato un campione casuale di 16 studenti scelti da una classe quinta di una scuola superiore, se ne misura l'altezza. È nota la varianza campionaria  $s^2 = 37.09\text{cm}^2$ .

Determinare un intervallo di confidenza bilaterale al 95% per la varianza  $\sigma^2$  della popolazione costituita

da tutti gli studenti delle classi quinte.

Poichè faccio delle misure, la densità della popolazione è una normale  $N(\mu, \sigma^2)$ .

Per costruire un intervallo di confidenza per  $\sigma^2$  quando  $\mu$  non è nota uso la statistica  $V$  e quindi  $\chi_{n-1}^2$ .

$$1 - \alpha = 0.95, \alpha = 0.05, \frac{\alpha}{2} = 0.025, 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$$

$$\nu = n - 1 = 15 \text{ gradi di libertà della } \chi^2$$

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 = \chi_{0.025, 15}^2 = 27.488$$

$$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 = \chi_{0.975, 15}^2 = 6.262$$

$$\frac{15 \cdot 37.09}{27.488} < \sigma^2 < \frac{15 \cdot 37.09}{6.262}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 \in (20.23; 88.84)$$

④ Le misure di un campione casuale di 200 sferette da cuscinetto prodotte da un macchinario, in una settimana, forniscono i seguenti dati:

$$\bar{x}_{200} = 0.824\text{cm}$$

$$s = 0.042\text{cm}$$

Determinare un intervallo di confidenza bilaterale per la media  $\mu$  della popolazione di sferette al 95%.

La funzione di densità della popolazione è una normale  $N(\mu, \sigma^2)$ .

La  $\sigma^2$  non è nota  $\rightarrow$  dovrei applicare la statistica  $T$ , ma la tabella della  $t$  di Student arriva fino al grado di libertà  $\nu = 50$  e nel nostro caso  $\nu = n - 1 = 199!!$ . Poichè i grafici della  $t$  e della  $Z$  sono simili, si può usare la  $N(0, 1)$  sostituendo a  $\sigma$  incognita il valore campionario  $s = 0.042$ .

$$1 - \alpha = 0.95, \alpha = 0.05, \frac{\alpha}{2} = 0.025, z_{0.025} = 1.96$$

$$0.824 - 1.96 \cdot \frac{0.042}{\sqrt{200}} < \mu < 0.824 + 1.96 \cdot \frac{0.042}{\sqrt{200}}$$

$$\Rightarrow \mu \in (0.818; 0.83)$$