

8 Distribuzioni congiunte

Nei casi trattati, gli esiti di un esperimento erano considerati realizzazioni di una singola variabile casuale. Tuttavia, in alcune situazioni può essere necessario o desiderabile ottenere esiti simultanei da più variabili casuali.

Bisogna perciò estendere il concetto di variabile casuale, di funzione di ripartizione, di funzione di densità di una variabile casuale al caso n -dimensionale.

DEFINIZIONE: Chiamiamo **variabile casuale n -dimensionale** una funzione $X = (X_1, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\forall (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$

$\{w \in \Omega : X_1(w) \leq r_1, \dots, X_n(w) \leq r_n\}$ è un evento

Quindi una variabile casuale n -dimensionale è una n -upla di variabili casuali, le quali associano un numero ad un risultato.

DEFINIZIONE: Chiamiamo **funzione di ripartizione congiunta** di X_1, \dots, X_n , la funzione

$$F_{X_1, \dots, X_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$$

tale che $\forall x = (x_1, \dots, x_n)$

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n]$$

Come nel caso 1-D, per definire la funzione di densità bisogna distinguere il caso discreto dal caso continuo. Noi ci occuperemo solo di variabili casuali n -dimensionali discrete.

DEFINIZIONE: La variabile casuale $X = (X_1, \dots, X_n)$ è detta **variabile casuale discreta n -dimensionale** se può assumere valori solo in un insieme numerabile (x_1, \dots, x_n) di punti di \mathbb{R}^n .

DEFINIZIONE: Chiamiamo **funzione di densità discreta congiunta** di $X = (X_1, \dots, X_n)$, variabile casuale discreta n -dimensionale, la funzione:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

Proprietà

- $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n)$
- $\sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = 1$
- $\forall A \subset \mathbb{R}^n \quad P[(x_1, \dots, x_n) \in A] = \sum_A f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$

Nel caso $n=2$ elenchiamo le proprietà della funzione di ripartizione congiunta relativa alla variabile casuale discreta bidimensionale (X, Y) .

Proprietà di $F_{X,Y}(x, y)$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0 \quad \forall y$
- $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0 \quad \forall x$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F_{X,Y}(x, y) = 1$
- se $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$ allora

$$P[x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2] = F_{X,Y}(x_2, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) \geq 0$$
- $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_{X,Y}(x + h, y) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F_{X,Y}(x, y + h) = F_{X,Y}(x, y)$ (continuità a destra)

DEFINIZIONE: Date X, Y variabili casuali congiunte discrete

$$F_{X,Y}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{x_i \leq \bar{x}} \sum_{y_j \leq \bar{y}} f_{X,Y}(x_i, y_j)$$

dove x_i, y_j sono i punti massa delle variabili casuali congiunte X, Y .

Dalla funzione di densità congiunta $f_{X,Y}(x, y)$ delle variabili casuali discrete congiunte X, Y è possibile ricavare le funzioni di densità $f_X(\cdot)$ di X e $f_Y(\cdot)$ di Y , dette funzioni di densità **marginali**.

DEFINIZIONE: Le funzioni di densità **marginali** di X e di Y sono:

$$f_X(x_k) = \sum_j f_{X,Y}(x_k, y_j)$$

$$f_Y(y_k) = \sum_j f_{X,Y}(x_j, y_k)$$

Nota bene: dalla funzione di densità congiunta è possibile sempre ricavare le funzioni di densità marginali, **ma non vale il viceversa**.

Ricordando la definizione di probabilità condizionata

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0,$$

se ora A è l'evento definito da $X = x$ e B è l'evento

definito da $Y = y$, allora

$$P[X = x|Y = y] = \frac{P[X = x, Y = y]}{P[Y = y]}, \quad P[Y = y] > 0$$

ed è possibile dare la definizione formale di funzione di densità condizionata.

DEFINIZIONE: Date X, Y variabili casuali discrete congiunte con funzione di densità congiunta $f_{X,Y}$, chiamiamo **funzione di densità condizionata** di X , dato $Y = y$, la funzione:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0.$$

Analogamente si definisce la **funzione di densità condizionata** di Y , dato $X = x$, la funzione:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0.$$

Conseguentemente è possibile definire le **funzioni di ripartizione condizionate** di Y , dato $X = x$, e di X , dato $Y = y$:

$$\begin{aligned} F_{Y|X}(y|x) &= P[Y \leq y|X = x] = \\ &= \sum_{\{j:y_j \leq y\}} f_{Y|X}(y_j|x), \quad f_X(x) > 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 F_{X|Y}(x|y) &= P[X \leq x | Y = y] = \\
 &= \sum_{\{j: x_j \leq x\}} f_{X|Y}(x_j|y), \quad f_Y(y) > 0
 \end{aligned}$$

Nota bene

$$\begin{aligned}
 f_{X,Y}(x, y) &= f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y), \\
 f_{X,Y}(x, y) &= f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x).
 \end{aligned}$$

Esempio. Lancio di due tetraedri (poliedri regolari a 4 facce) aventi le facce numerate da 1 a 4.

Chiamiamo X la variabile casuale che indica il numero sulla faccia rivolta verso il basso del 1° tetraedro, Y la variabile casuale che indica il numero più grande fra quelli indicati sulle facce rivolte verso il basso dei due tetraedri.

I valori congiunti di X e Y sono:

$$\begin{aligned}
 &(1, 1) \quad (1, 2) \quad (1, 3) \quad (1, 4) \\
 &(2, 2) \quad (2, 3) \quad (2, 4) \\
 &(3, 3) \quad (3, 4) \\
 &(4, 4)
 \end{aligned}$$

Tabella 1: I valori di (X, Y) nel lancio dei due tetraedri

1° T	2° T	(X, Y)
1	1	(1,1)
1	2	(1,2)
1	3	(1,3)
1	4	(1,4)
2	1	(2,2)
2	2	(2,2)
2	3	(2,3)
2	4	(2,4)
3	1	(3,3)
3	2	(3,3)
3	3	(3,3)
3	4	(3,4)
4	1	(4,4)
4	2	(4,4)
4	3	(4,4)
4	4	(4,4)

Lo spazio campione Ω è formato da 16 elementi.

In quanti modi ottengo il risultato $(2, 2)$? $\frac{2}{16}$

In quanti modi ottengo il risultato $(3, 3)$? $\frac{3}{16}$

In quanti modi ottengo il risultato $(4, 4)$? $\frac{4}{16}$

Riassumiamo tutti i possibili risultati in una tabella.

Tabella 2: I valori della funzione di densità congiunta

(X, Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(3,3)	(3,4)	(4,4)
$f_{X,Y}(x, y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$

Si noti che $\sum_{i,j} f_{X,Y}(x_i, y_j) = 1$.

Dalla definizione di funzione di ripartizione congiunta si ha (ricorda che $F_{X,Y}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{x_i \leq \bar{x}, y_j \leq \bar{y}} f_{X,Y}(x_i, y_j)$):

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{X,Y}(1, 1) = f_{X,Y}(1, 1) = \frac{1}{16} \\ F_{X,Y}(1, 2) = f_{X,Y}(1, 1) + f_{X,Y}(1, 2) = \frac{2}{16} \\ F_{X,Y}(1, 3) = f_{X,Y}(1, 1) + f_{X,Y}(1, 2) + f_{X,Y}(1, 3) = \frac{3}{16} \\ F_{X,Y}(1, 4) = f_{X,Y}(1, 1) + f_{X,Y}(1, 2) + f_{X,Y}(1, 3) + f_{X,Y}(1, 4) = \frac{4}{16} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{X,Y}(2, 1) = f_{X,Y}(1, 1) = \frac{1}{16} \\ F_{X,Y}(2, 2) = f_{X,Y}(1, 1) + f_{X,Y}(1, 2) + f_{X,Y}(2, 2) = \frac{4}{16} \\ F_{X,Y}(2, 3) = f_{X,Y}(1, 1) + f_{X,Y}(1, 2) + f_{X,Y}(1, 3) + f_{X,Y}(2, 2) + \\ \quad + f_{X,Y}(2, 3) = \frac{6}{16} \\ F_{X,Y}(2, 4) = \frac{8}{16} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{X,Y}(3, 1) = f_{X,Y}(1, 1) = \frac{1}{16} \\ F_{X,Y}(3, 2) = f_{X,Y}(1, 1) + f_{X,Y}(1, 2) + f_{X,Y}(2, 2) = \frac{4}{16} \\ F_{X,Y}(3, 3) = f_{X,Y}(1, 1) + f_{X,Y}(1, 2) + f_{X,Y}(1, 3) + f_{X,Y}(2, 2) + \\ \quad + f_{X,Y}(2, 3) + f_{X,Y}(3, 3) = \frac{9}{16} \\ F_{X,Y}(3, 4) = \frac{12}{16} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} F_{X,Y}(4, 1) = \frac{1}{16} \\ F_{X,Y}(4, 2) = \frac{4}{16} \\ F_{X,Y}(4, 3) = \frac{9}{16} \\ F_{X,Y}(4, 4) = 1 \end{cases}$$

Le seguenti figure riassumono i valori di $F_{X,Y}(x, y)$ ed i valori di $f_{X,Y}(x, y)$ con le relative funzioni di densità marginali.

$4 \leq y$	0	$4/16$	$8/16$	$12/16$	1
$3 \leq y < 4$	0	$3/16$	$6/16$	$9/16$	$9/16$
$2 \leq y < 3$	0	$2/16$	$4/16$	$4/16$	$4/16$
$1 \leq y < 2$	0	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$
$y < 1$	0	0	0	0	0
	$x < 1$	$1 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$	$3 \leq x < 4$	$4 \leq x$

Figura 34: Tabella dei valori di $F_{X,Y}(x, y)$

4	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$4/16$		$\rightarrow f_Y(4)$
3	$1/16$	$1/16$	$3/16$			$\rightarrow f_Y(3)$
2	$1/16$	$2/16$				$\rightarrow f_Y(2)$
1	$1/16$					$\rightarrow f_Y(1)$
y/x	1	2	3	4	1	
	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow		
	$f_X(1)$	$f_X(2)$	$f_X(3)$	$f_X(4)$		

Figura 35: Tabella dei valori di $f_{X,Y}(x, y)$ con le densità marginali

OSSERVAZIONE. Le densità marginali si calcolano più facilmente sommando per righe o per colonne i valori di $f_{X,Y}$ della tabella a doppia entrata.

Vogliamo ora calcolare le funzioni di densità condizionate di Y dato $X = 2$ e dato $X = 3$

$$f_{Y|X}(y|2) = \frac{f_{X,Y}(2, y)}{f_X(2)}$$

se $X = 2 \Rightarrow Y \geq 2$

$$\left. \begin{aligned} f_{X,Y}(2|2) &= \frac{f_{X,Y}(2, 2)}{f_X(2)} = \frac{2/16}{4/16} = \frac{1}{2} \\ f_{X,Y}(3|2) &= \frac{f_{X,Y}(2, 3)}{f_X(2)} = \frac{1/16}{4/16} = \frac{1}{4} \\ f_{X,Y}(4|2) &= \frac{f_{X,Y}(2, 4)}{f_X(2)} = \frac{1/16}{4/16} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \sum = 1$$

se $X = 3 \Rightarrow Y \geq 3$

$$\left. \begin{aligned} f_{X,Y}(3|3) &= \frac{f_{X,Y}(3, 3)}{f_X(3)} = \frac{3/16}{4/16} = \frac{3}{4} \\ f_{X,Y}(4|3) &= \frac{f_{X,Y}(3, 4)}{f_X(3)} = \frac{1/16}{4/16} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \sum = 1$$

Esercizio. Calcolare $f_{Y|X}$ dati $X = 1$ e $X = 4$. Quanto vale $f_{X|Y}$ dati $Y = 1, 2, 3, 4$?

INDIPENDENZA

DEFINIZIONE: Data $X = (X_1, \dots, X_n)$ variabile casuale n -dimensionale (discreta o continua) con funzione di densità congiunta f_{X_1, \dots, X_n} , diciamo che X_1, \dots, X_n sono variabili casuali **INDIPENDENTI** se e solo se

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n),$$

cioè la funzione di densità congiunta si scrive come PRODOTTO delle funzioni di densità marginali.

Nel caso 2-D si ha quindi che X, Y sono indipendenti se e solo se $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

Dalla definizione di densità condizionata si ha:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$$

perciò

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

cioè la densità condizionata di Y dato $X = x$ è la densità **non** condizionata di Y .

Per mostrare che due variabili casuali non sono indipendenti basta mostrare che $f_{Y|X}(y|x)$ dipende da x .

OSSERVAZIONE

Si può provare che se X_1, \dots, X_n sono variabili casuali indipendenti e se g_1, \dots, g_n sono n funzioni tali che $Y_k = g_k(X_k)$, $k = 1, \dots, n$, sono variabili casuali, allora Y_1, \dots, Y_n sono indipendenti.

Nell'esempio del lancio dei due tetraedri, alla domanda “Le variabili casuali X, Y sono indipendenti?”, la risposta è **NO!**

Basta infatti trovare una coppia di valori (X, Y) per i quali:

$$f_{Y|X}(y|x) \neq f_Y(y)$$

Per esempio se $X = 3, Y = 2$

$$f_{Y|X}(2|3) = P[Y = 2|X = 3] = 0 \text{ poich\`e } Y < X$$

ma

$$f_Y(2) = P[Y = 2] = \frac{3}{16}.$$

Esempio

Da un gruppo di 12 batterie (3 nuove, 4 usate, 5 difettose) ne vengono scelte 3 a caso. Indicato con

X = numero di batterie nuove

Y = numero di batterie usate

tra quelle scelte, determinare la $f_{X,Y}(x, y)$.

Elenchiamo i possibili risultati:

$$\text{NNN} \Rightarrow f(3, 0)$$

$$\text{NNU} \Rightarrow f(2, 1)$$

$$\text{NND} \Rightarrow f(2, 0)$$

$$\text{NUU} \Rightarrow f(1, 2)$$

$$\text{NDD} \Rightarrow f(1, 0)$$

$$\text{NUD} \Rightarrow f(1, 1)$$

$$\text{UUU} \Rightarrow f(0, 3)$$

$$\text{UUD} \Rightarrow f(0, 2)$$

$$\text{UDD} \Rightarrow f(0, 1)$$

$$\text{DDD} \Rightarrow f(0, 0)$$

(non conta l'ordine)

$$f(3, 0) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{220}$$

$$f(2, 1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{12}{220}$$

$$f(2, 0) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{15}{220}$$

$$f(1, 2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{18}{220}$$

$$f(1, 0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220}$$

$$f(1, 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{60}{220}$$

$$f(0, 3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{4}{220}$$

$$f(0, 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220}$$

$$f(0, 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{40}{220}$$

$$f(0, 0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{10}{220}$$

La seguente figura riassume i valori di $f_{X,Y}(x, y)$.

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	$f_X(x)$
$X=0$	$1/22$	$2/11$	$3/22$	$1/55$	$42/110$
$X=1$	$3/22$	$3/11$	$9/110$	0	$27/55$
$X=2$	$15/220$	$3/55$	0	0	$27/220$
$X=3$	$1/220$	0	0	0	$1/220$
$f_Y(y)$	$14/55$	$28/55$	$12/55$	$1/55$	1

Figura 36: Tabella dei valori di $f_{X,Y}(x,y)$ con le marginali

MODELLO DI VARIABILE CASUALE N DIMENSIONALE DISCRETA

DISTRIBUZIONE MULTINOMIALE

Tale distribuzione è associata a prove ripetute e indipendenti, che generalizzano il caso delle prove di Bernoulli a 2 esiti a quello con più di due esiti.

Supponiamo che esistano $k + 1$ esiti possibili distinti di un tentativo. Siano s_1, \dots, s_{k+1} tali esiti.

Sia $p_i = P[s_i]$, $i = 1, \dots, k + 1$ con

$$\sum_{i=1}^{k+1} p_i = 1, \Rightarrow p_{k+1} = 1 - (p_1 + \dots + p_k)$$

Ripetiamo le prove n volte.

Se le prove sono ripetute e indipendenti si ha:

$$f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_{k+1}!} p_1^{x_1} \cdots p_{k+1}^{x_{k+1}}$$

dove

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i = n, \Rightarrow x_{k+1} = n - \sum_{i=1}^k x_i.$$

Pertanto cerchiamo la probabilità che da n prove si abbiano esattamente x_1 esiti del tipo s_1 , x_2 esiti del tipo s_2 e ... x_{k+1} esiti del tipo s_{k+1} .

Un particolare ordinamento ha probabilità

$$p_1^{x_1} \cdots p_{k+1}^{x_{k+1}}$$

e di ordinamenti ne esistono:

$$\frac{n!}{x_1! \cdots x_{k+1}!}.$$

Esempio

Su un quantitativo di merce, il 10% viene pagato in ritardo, il 30% viene restituito.

Vengono effettuati 20 ordini.

Calcolare la probabilità che 3 ordini vengano pagati in ritardo e 5 vengano restituiti (su un totale di 20).

Ipotesi: indipendenza

$$n = 20$$

$$x_1 = 3, \quad p_1 = 0.1,$$

$$x_2 = 5, \quad p_2 = 0.3,$$

$$x_3 = n - x_1 - x_2 = 20 - 3 - 5 = 12,$$

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0.1 - 0.3 = 0.6.$$

Il valore cercato è

$$p = \frac{20!}{3!5!12!} (0.1)^3 \cdot (0.3)^5 \cdot (0.6)^{12} \sim 0.037$$