7 Distribuzioni di probabilità continue

DISTRIBUZIONE UNIFORME CONTINUA

Tra tutte le distribuzioni continue, la più semplice è la distribuzione uniforme o rettangolare, caratterizzata da una funzione di densità "piatta". La variabile casuale continua uniforme X è definita su un intervallo chiuso $[a, b]$ e la sua probabilità è uniforme in $[a, b]$:

$$U(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b\,, \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

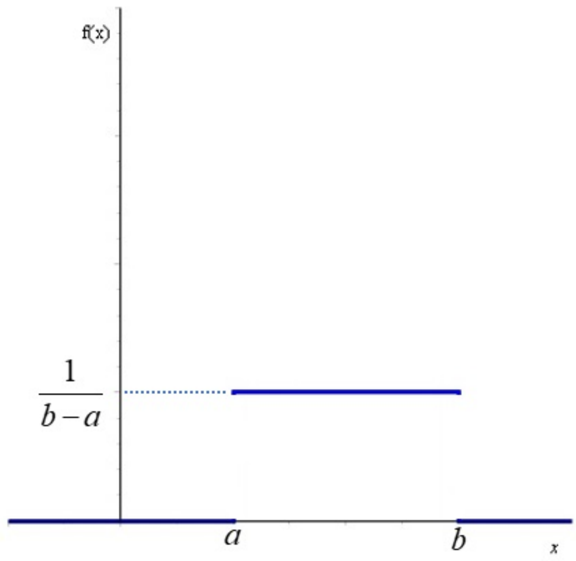

Figura 21

- $E[X] = \frac{a+b}{2}$
- $\text{var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

I precedenti valori si ottengono applicando la definizione di valore atteso e varianza di una variabile casuale continua.

Esempi

1) Una sala per congressi può essere prenotata per al massimo 4 ore. La durata di una conferenza può essere rappresentata da una variabile casuale uniforme X su $[0, 4]$.

- Scrivere la funzione densità.
- Calcolare la probabilità che una qualunque conferenza duri almeno 3 ore.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & 0 \leq x \leq 4\,, \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

$P[X \geq 3] = \int_3^4 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}$

2) Gli autobus passano nei pressi dell'università ogni ora tra le 8:30 e le 13:30.
Calcolare la probabilità che una persona debba aspettare almeno un quarto d'ora durante tale periodo.

La variabile casuale che indica "tempo mancante al prossimo autobus" segue un modello uniforme.
$P[X \geq 15] = 1 - P[X < 15] = 1 - P[X \leq 15] = 1 - F(15)$
Poichè

$$F(x) = P[a \leq X \leq x] = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

e $b - a = 60\text{min} - 0\text{min}$

$F(15) = \frac{15-0}{60-0} = \frac{1}{4} \Rightarrow P[X \geq 15] = \frac{3}{4}$

DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA

È la distribuzione di probabilità continua più importante. Descrive molti fenomeni che si verificano in natura, si usa per misurazioni fisiche e approssima molto bene gli errori di misurazione. Gioca un ruolo fondamentale in statistica ed è il cardine del teorema del limite centrale.

Una variabile casuale continua X è normale se la funzione di densità associata è:

$$N(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

con $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

- $E[X] = \mu$
- $\text{var}[X] = \sigma^2$

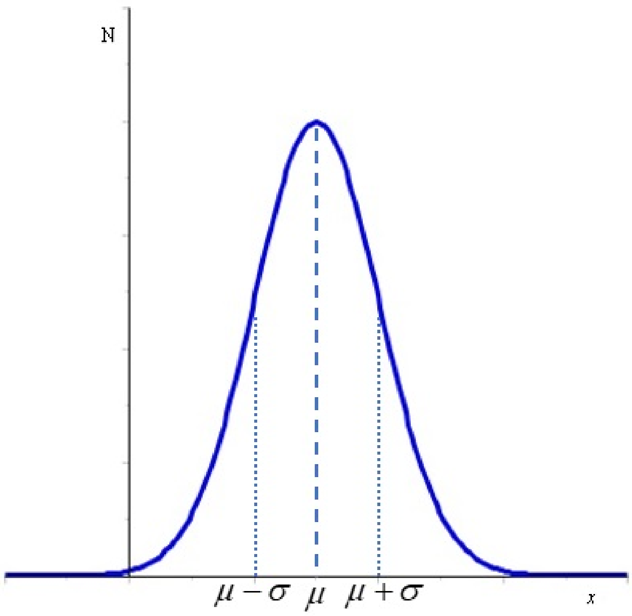

Figura 22

Proprietà

1. N è simmetrica rispetto alla retta $x = \mu$ (mediana=media)

2. N ha un punto di massimo in $x = \mu$ (moda = media)

3. N ha due punti di flesso in $x = \mu \pm \sigma$

4. $\lim_{x \to \pm\infty} N(x, \mu, \sigma) = 0$

5. modificare il valore di μ equivale a traslare sull'asse Ox il grafico di N senza deformarlo

6. cambiare il valore di σ equivale a modificare la forma del grafico di N senza traslarlo.

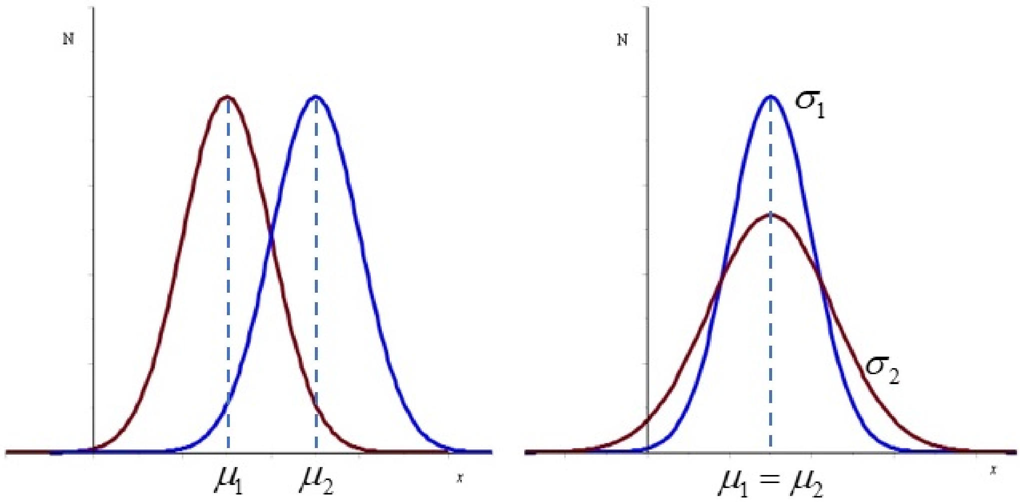

Figura 23

Poichè è impossibile riportare in tabella i valori di porzioni di area al di sotto della curva per ogni valore di μ e di σ si trasforma ogni variabile casuale normale X in una variabile casuale normale Z avente media nulla e varianza unitaria.
DEFINIZIONE: Una variabile casuale normale con $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ è detta NORMALE STANDARD o RIDOTTA.
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$E[Z] = E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}E[X-\mu] =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\left(E[X] - E[\mu]\right) = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$$

$$\mathrm{var}[Z] = \mathrm{var}\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{var}[X-\mu] =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{var}[X] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

La funzione di densità di una variabile casuale normale standard Z è:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad z \in \mathbb{R}$$

indipendente da μ e σ.

La sua funzione di ripartizione è:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(t)dt$$

Proprietà

- $P[a \le X \le b] = P\left[\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right] =$
  $= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
- $P[X \ge a] = 1 - P[X < a] = 1 - P\left[Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
  (ricorda che per le proprietà della funzione di ripartizione $\Phi(-\infty) = 0$ e $\Phi(+\infty) = 1$)
- $\Phi(-z_0) = 1 - \Phi(z_0)$

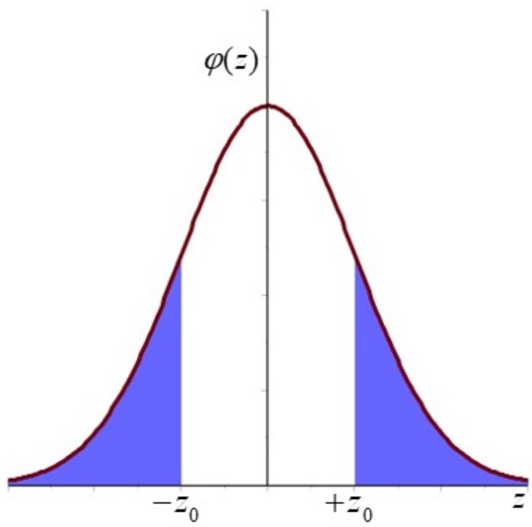

Figura 24

Infatti
$P[Z < -z_0] = \Phi(-z_0)$
ma
$P[Z < -z_0] = P[Z > z_0] = 1 - P[Z \leq z_0] = 1 - \Phi(z_0)$

Esempio

Il peso di 2 confezioni di un prodotto è una variabile casuale normale X con media $\mu = 250$ g e deviazione standard $\sigma = 3$ g. Calcolare la probabilità che il peso delle 2 confezioni sia minore di 245 g.

$X \sim N(250, 3) \rightarrow Z = \frac{X-250}{3}$

$$P[X < 245] = P\left[Z < \frac{245-250}{3}\right] =$$
$$= P[Z < -\frac{5}{3}] = 1 - P[Z \leq \frac{5}{3}] =$$
$$= 1 - \Phi(1.67) = \quad \text{dalla tabella}$$
$$= 1 - 0.9525 = 0.0475$$

Problema inverso

Fino ad ora abbiamo visto come, conoscendo il valore in ascissa z (o x), sia possibile calcolare l'area sottesa dalla curva $\phi(z)$ (o $N(x)$), cioè valutare la funzione di ripartizione.

In alcuni casi invece il dato a disposizione è una determinata probabilità (= area) di cui si vuole conoscere il corrispondente valore di percentile.

Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Dato $\alpha \in [0,1]$, determinare il valore x_α tale che $P[X > x_\alpha] = \alpha$.

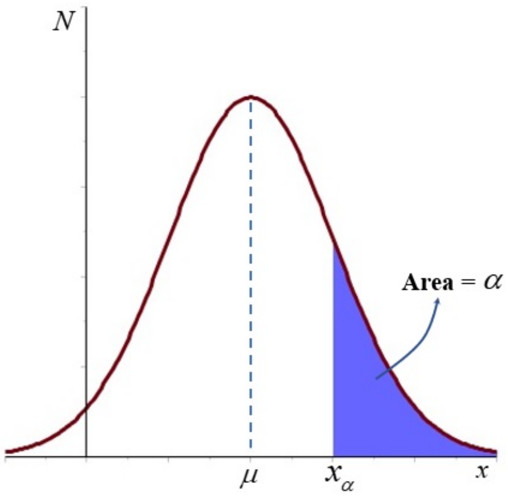

Figura 25

Dato $\alpha \in [0,1]$, determinare il valore z_α tale che $P[Z > z_\alpha] = \alpha$.

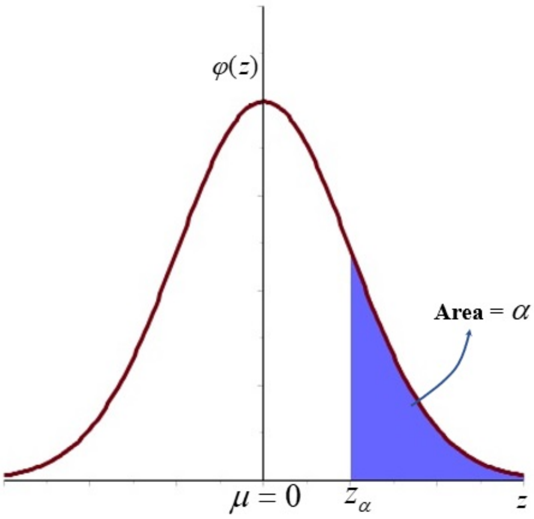

Figura 26

Esempio

Sia X una variabile casuale normale $N(\mu = 19, \sigma^2 = 49)$.

Determinare il valore x_α tale che:

$$P[X > x_\alpha] = 20\%$$

$0.20 = P[X > x_\alpha] = P\left[Z > \frac{x_\alpha - 19}{7}\right] = P[Z > z_\alpha]$
$= 1 - P[Z \leq z_\alpha]$
quindi
$P[Z \leq z_\alpha] = 0.8$
Dalla tabella della $\Phi(z)$ non troviamo esattamente 0.80 ma:
$0.7995 \rightarrow z = 0.84$
$0.8023 \rightarrow z = 0.85$

Si può mostrare che una buona approssimazione si ottiene se si approssima $\Phi(z)$ tramite una retta nell'intorno considerato. Scriviamo l'equazione della retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

e cerchiamo il valore di $\overline{x}$ che corrisponde ad $\overline{y} = 0.80$:

$$\frac{0.8 - 0.7995}{0.8023 - 0.7995} = \frac{\overline{x} - 0.84}{0.85 - 0.84} \quad \Rightarrow \quad \overline{x} = 0.8418$$

Allora il valore cercato è $z_\alpha = 0.8418$
Poichè $z_\alpha = \frac{x_\alpha - 19}{7}$ si ricava $x_\alpha = 24.8926$

Un'approssimazione più rozza si ottiene calcolando la media tra 0.84 e 0.85, cioè $z_\alpha = 0.845$, da cui si ricava $x_\alpha = 24.915$.

Valori tabulati

- $P[Z \geq z_\alpha] = 1\% = 0.01 \Rightarrow z_\alpha \approx 2.326$
- $P[Z \geq z_\alpha] = 5\% = 0.05 \Rightarrow z_\alpha \approx 1.645$
- $P[Z \geq z_\alpha] = 2.5\% = 0.025 \Rightarrow z_\alpha = 1.96$

Esempi

1) $P[Z < z_\alpha] = 0.9953$
Dalle tavole $z_\alpha = 2.6$

2) $P[Z > z_\alpha] = 0.2743$
$P[Z > z_\alpha] = 1 - P[Z \leq z_\alpha]$
$\Rightarrow P[Z \leq z_\alpha] = 1 - 0.2743 = 0.7257$
Dalle tavole $z_\alpha = 0.6$

3) $P[0 \leq Z \leq z_\alpha] = 0.377$
$P[0 \leq Z \leq z_\alpha] = P[Z \leq z_\alpha] - 0.5$
$(0.5 = P[-\infty < Z < 0])$
$\Rightarrow P[Z \leq z_\alpha] = 0.5 + 0.377 = 0.877$
Dalle tavole $z_\alpha = 1.16$

4) $P[|Z| \leq z_\alpha] = 0.5762$
$P[|Z| \leq z_\alpha] = P[-z_\alpha \leq Z \leq z_\alpha] =$
$= 2P[0 \leq Z \leq z_\alpha] = 2\left(P[Z \leq z_\alpha] - 0.5\right) =$
$= 2P[Z \leq z_\alpha] - 1$
$\Rightarrow P[Z \leq z_\alpha] = \frac{0.5762+1}{2} = 0.7881$
Dalle tavole $z_\alpha = 0.8$

5) $P[z_\alpha < Z < 1.6] = 0.7865$

$P[z_\alpha < Z < 1.6] = P[Z < 1.6] - P[Z < z_\alpha]$
Dalle tavole $P[Z < 1.6] = 0.9452$
$P[Z < z_\alpha] = 0.9452 - 0.7865 = 0.1587 < 0.5!!!$
z_α è negativo
Cerco il valore z_α^* positivo, simmetrico (a destra dell'origine) tale che

$$P[Z > z_\alpha^*] = 0.1587$$

$P[Z > z_\alpha^*] = 1 - P[Z \leq z_\alpha^*]$
$\Rightarrow P[Z \leq z_\alpha^*] = 1 - 0.1587 = 0.8413$
Dalle tavole $z_\alpha^* = 1 \to z_\alpha = -1$

<u>Esercizi</u>

1) La potenza W dissipata da una resistenza è proporzionale al quadrato della differenza di potenziale V $(V > 0)$ ai suoi capi, cioè $W = kV^2$, con k una costante.
Calcolare $E[W]$ e $P[W > 120]$ se $k = 3$ e $V \sim N(6, 1)$ (in opportune unità di misura).

$E[W] = E[3V^2] = 3E[V^2]$
ma per ogni variabile casuale X
$\text{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$
quindi

$E[V^2] = \text{var}[V] + E[V]^2 = 1 + 36 = 37 \Rightarrow$
$\Rightarrow E[W] = 111$

$P[W > 120] = P[V^2 > 40] = P[V > 2\sqrt{10}]$
$Z = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V} = V - 6$
$P[V > 2\sqrt{10}] = P[Z > 2\sqrt{10} - 6] \sim$
$\sim P[Z > 0.3246]$
0.3246 non c'è sulle tavole, ma:
$0.32 \rightarrow$ area $= 0.62552$
$0.33 \rightarrow$ area $= 0.62930$
$0.3246 \sim 0.325 \rightarrow$ faccio la media tra le aree ottenendo 0.6274.

$\Rightarrow P[Z > 0.3246] = 1 - P[Z \leq 0.3246] \sim$
$\sim 1 - 0.6274 = 0.3726$

2) Una macchina produce resistori elettrici che devono avere una resistenza media di 40 ohm e una deviazione standard di 2 ohm. Se la resistenza si distribuisce come una normale, qual è la percentuale di resistori che avranno una resistenza superiore ai 43 ohm?

Per trovare la percentuale si moltiplica per 100% la frequenza relativa. La frequenza relativa, nel caso di un intervallo è pari alla probabilità di osservare un valore qualunque all'interno dell'intervallo.

$X \sim N(40, 2)$, $Z = \frac{X-40}{2}$

$$P[X > 43] = P\left[Z > \frac{43-40}{2}\right] = P[Z > 1.5] =$$
$$= 1 - P[Z \leq 1.5] = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

$\Rightarrow$ la percentuale è pari al 6.68%.

Determinare la percentuale di resistenze che superano 43 ohm se la resistenza misurata è all'ohm più vicino.

Questo problema è diverso dal precedente perchè si assegna una misura di 43 ohm ai resistori le cui resistenze sono > 42.5 e < 43.5.

$$P[X > 43.5] = P\left[Z > \frac{43.5-40}{2}\right] =$$
$$= P[Z > 1.75] = 1 - P[Z \leq 1.75] =$$
$$= 1 - 0.9599 = 0.0401$$

$\Rightarrow$ la percentuale è pari al 4.01%, cioè il 4.01% delle resistenze supera i 43 ohm quando misurate all'ohm più vicino.
La differenza $6.68\% - 4.01\% = 2.67\%$ rappresenta tutti i valori di resistenza > 43 ohm e < 43.5 ohm che vengono misurati come 43 ohm.

APPROSSIMAZIONI

La distribuzione normale risulta spesso una buona approssimazione di una distribuzione discreta quando quest'ultima dimostra di avere una forma simmetrica a campana.

$$X \sim B(x; \mu = np, \sigma^2 = npq) \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ p\to 0}]{} N(x; \mu, \sigma^2) \xrightarrow[Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}]{} N(0,1)$$

$$E[X_N] = E[X_B] \Rightarrow \mu = np$$
$$\text{var}[X_N] = \text{var}[X_B] \Rightarrow \sigma^2 = npq$$

Da un punto di vista empirico è sufficiente che

$$npq \geq 10$$

(altri testi indicano $np \geq 5$ e $nq \geq 5$) perchè l'approssimazione sia buona.

$$X \sim P(x;\lambda) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} N(x;\mu,\sigma^2) \xrightarrow[Z=\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}]{} N(0,1)$$

$$E[X_N] = E[X_P] \Rightarrow \mu = \lambda$$
$$\text{var}[X_N] = \text{var}[X_P] \Rightarrow \sigma^2 = \lambda$$

È sufficiente che $\lambda \geq 10$.

Osservazione

Quando si approssima una distribuzione discreta con una distribuzione continua di solito si applica la correzione di continuità, cioè si modifica l'intervallo di integrazione ampliando di 0.5 gli estremi dell'intervallo su cui si integra la continua per approssimare la discreta, ottenendo così una approssimazione migliore.

Esempi

1) Un test a scelta multipla è composto da 200 quesiti, ognuno dei quali ha 4 possibili risposte di cui solo una è corretta. Sapendo che lo studente non conosce le risposte, qual è la probabilità che le risposte corrette siano tra 25 e 30, se risponde a 80 quesiti su

200?
$X \sim B(n = 80, p = \frac{1}{4})$

$$P[25 \leq X \leq 30] = P[X = 25] + \ldots + P[X = 30] =$$
$$= \sum_{x=25}^{30} \binom{80}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{80-x} = 0.1193$$

$npq = 80 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 15 (> 10)$
Posso approssimare con la normale
$\mu = np = 20$
$\sigma^2 = npq = 15 \Rightarrow \sigma = 3.873$
$X \sim N(20, 15)$
Applicando la correzione di continuità l'intervallo diventa (24.5, 30.5).

$$P[24.5 < X < 30.5] =$$
$$= P\left[\frac{24.5 - 20}{3.873} < Z < \frac{30.5 - 20}{3.873}\right] =$$
$$= P[1.16 < Z < 2.71] = \Phi(2.71) - \Phi(1.16) =$$
$$= 0.9966 - 0.8770 = 0.1196$$

2) La probabilità che un individuo guarisca da una malattia rara è 0.4. Se 100 persone hanno contratto la malattia, qual è la probabilità che meno di 30 sopravvivano?

$n = 100 \quad p = 0.4 \quad q = 0.6 \quad npq = 24 > 10$
$\mu = 40 \quad \sigma^2 = 24 \quad \sigma = 4.899$

con la binomiale
$P[0 \leq X < 30] = P[0 \leq X \leq 29] =$
$= \sum_{x=0}^{29} \binom{100}{x} (0.4)^x (0.6)^{100-x} = 0.0148$

con la normale, applicando la correzione di continuità:

$$P[-0.5 < X < 29.5] =$$
$$= P\left[\frac{-0.5 - 40}{4.899} < Z < \frac{29.5 - 40}{4.899}\right] =$$
$$= P[-8.26 < Z < -2.14] = P[2.14 < Z < 8.26] =$$
$$= \Phi(8.26) - \Phi(2.14) = 1 - 0.9838 = 0.0162$$

Nota bene: per qualsiasi variabile casuale discreta X:
$P[X \leq x] = P[X \leq x + \frac{1}{2}]$
$P[x \leq X \leq y] = P[X \leq y + \frac{1}{2}] - P[X \leq x - \frac{1}{2}]$

DISTRIBUZIONE GAMMA

Il suo nome deriva dalla funzione gamma di Eulero, così definita:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} dx \,, \qquad \alpha > 0$$

che soddisfa le uguaglianze:

$\Gamma(n) = (n-1)!$

$\Gamma(1) = 1$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

La variabile casuale continua X ha una distribuzione gamma di parametri r e λ se la sua funzione di densità è data da:

$$f(x; r, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} & x \geq 0 \,, \\ 0 & \text{altrove} \,, \end{cases}$$

con $r > 0$ e $\lambda > 0$.

- $E[X] = \dfrac{r}{\lambda}$
- $\mathrm{var}[X] = \dfrac{r}{\lambda^2}$

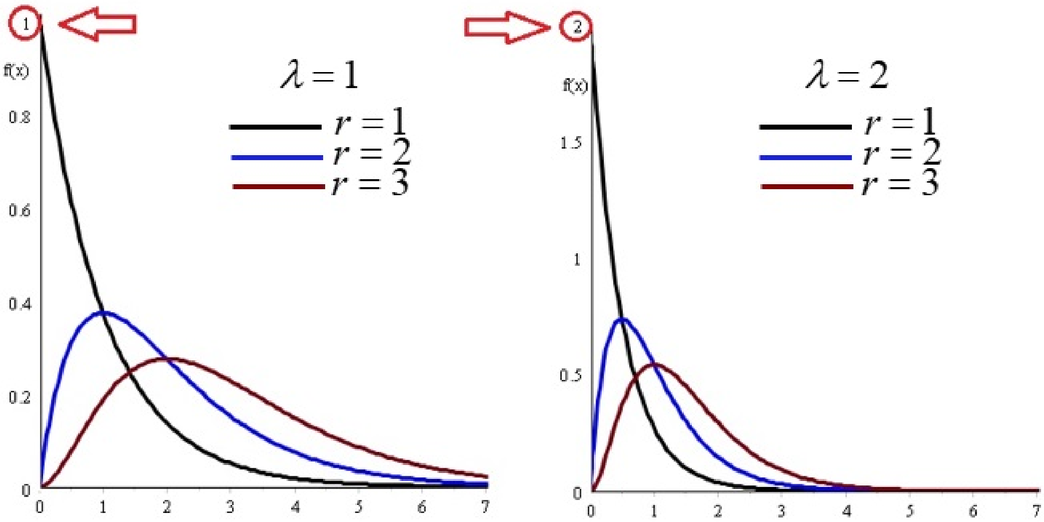

Figura 27

Si noti che se $r = 1$ la densità gamma è la densità esponenziale.

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

Viene utilizzata nei problemi di affidabilità, nel modellare la durata della vita di un componente, il tempo al verificarsi di un guasto di sistemi elettronici. Una variabile casuale continua X è detta esponenziale se la sua funzione di densità è:

$$\exp(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0\,, \\ 0 & \text{altrove}\,, \end{cases}$$

con $\lambda > 0$.

- $E[X] = \dfrac{1}{\lambda}$
- $\mathrm{var}[X] = \dfrac{1}{\lambda^2}$
- $$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & x \geq 0\,, \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Proprietà: assenza di memoria

Il tempo di vita di un componente è una variabile casuale esponenziale. Finchè il componente funziona, si comporta come se fosse nuovo, cioè l'usura dovuta al funzionamento nelle prime t ore iniziali non influenza la durata successiva di $(t + s)$ ore, cioè:

$$P[X > s + t|X > t] = P[X > s]$$

Infatti

$$P[X > s + t|X > t] = \frac{P[X > s + t, X > t]}{P[X > t]} =$$
$$= \frac{P[X > s + t]}{P[X > t]} = \frac{1 - P[X \leq s + t]}{1 - P[X \leq t]} =$$
$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P[X > s]$$

Esempi

1) La variabile casuale T, che descrive il tempo che deve trascorrere, in anni, perchè un componente si guasti, è una variabile casuale esponenziale con media pari a 5.
Se 5 componenti vengono installati contemporaneamente, qual è la probabilità che almeno 2 componenti siano funzionanti alla fine dell'ottavo anno?

$E[T] = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$

$$P[T > 8] = \int_8^{\infty} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} dx = e^{-\frac{8}{5}} \sim 0.2$$

rappresenta la probabilità che il componente funzioni dopo 8 anni.
Adesso bisogna applicare la binomiale:

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - P[X = 0] - P[X = 1]$$
$$1 - \binom{5}{0}(0.2)^0(0.8)^5 - \binom{5}{1}(0.2)^1(0.8)^4 =$$
$$1 - (0.8)^5 - (0.8)^4 = 1 - 0.73728 = 0.2627$$

2) Il tempo (in anni) che trascorre prima che una lavatrice necessiti di una riparazione è una variabile casuale esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{4}$.
Calcolare la probabilità che sia necessaria una ripa-

razione nel 1° anno e la probabilità che sia necessaria una riparazione prima della fine del 6° anno.

$P[X \leq 1] = 1 - e^{-\lambda x}\Big|_{x=1,\lambda=\frac{1}{4}} = 1 - e^{-\frac{1}{4}} = 0.221$

$P[X \leq 6] = 1 - e^{-\lambda x}\Big|_{x=6,\lambda=\frac{1}{4}} = 1 - e^{-\frac{3}{2}} = 0.777$

Poichè la seconda probabilità è alta si può affermare che il prodotto non è vantaggioso.

DISTRIBUZIONE χ^2 (CHI-QUADRO)

È un caso speciale della distribuzione gamma, per $\lambda = \frac{1}{2}$ ed $r = \frac{\nu}{2}$, dove $\nu \in \mathbb{N}$ è chiamato grado di libertà. Ha un ruolo fondamentale nell'inferenza statistica. La variabile casuale χ^2 ha come funzione di densità:

$$\chi^2(x,\nu) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0\,, \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

- $E[X] = \nu$
- $\mathrm{var}[X] = 2\nu$

(grafico $\rightarrow$ vedi la densità gamma).

DISTRIBUZIONE DI STUDENT t

È simile alla normale standard, ma ha le code più pesanti. Interviene nella stima della media di una popolazione caratterizzata da una distribuzione normale. La variabile casuale t di Student ha la seguente funzione di densità:

$$t(x,\nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

con $\nu \in \mathbb{N}$ chiamato grado di libertà.

- $E[X] = 0$ se $\nu > 1$
- $\text{var}[X] = \frac{\nu}{\nu-2}$ se $\nu > 2$

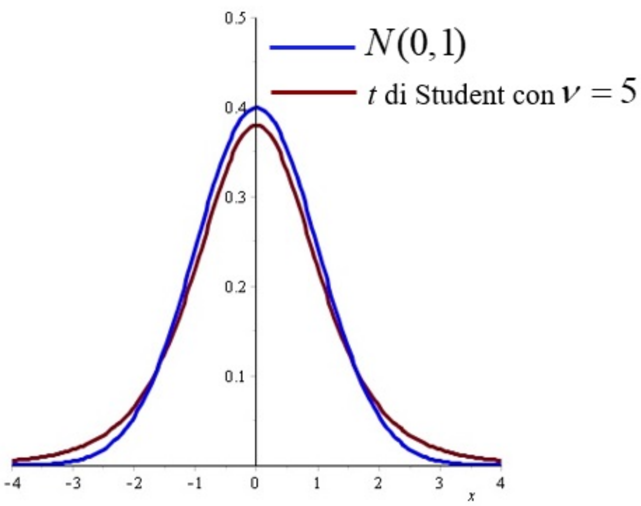

Figura 28

Esercizi

1) Calcolare il percentile della χ^2 per $\nu = 5$ tale che:

$$P[\chi^2 > \chi^2_{5;0.025}] = 0.025$$

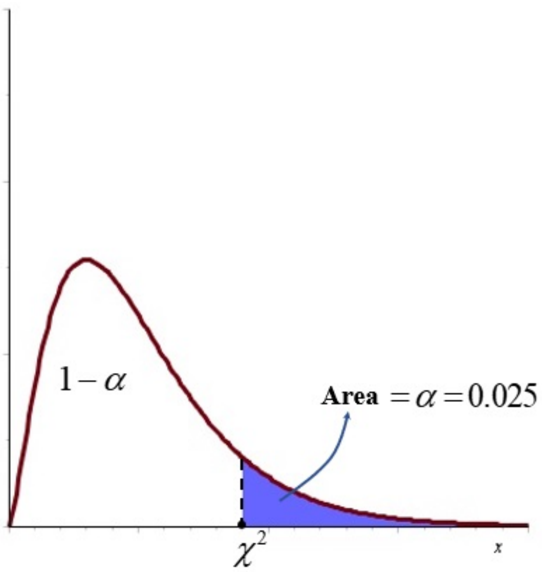

Figura 29

$\chi^2_{5,0.025} = 12.83249$
$1 - \alpha = 0.975$

2) Calcolare

$$P[\chi^2 > 6.25139] \qquad \text{se} \quad \nu = 3$$

per $\nu = 3$, 6.25139 corrisponde ad $1 - \alpha = 0.9$
quindi $\alpha = 0.1$, $\chi^2_{3,0.1} = 6.25139$ e

$P[\chi^2 > \chi^2_{3,0.1}] = 0.1$

3) Calcolare il percentile della t di Student tale che per $\nu = 24$

$$P[T > t_{24,0.05}] = 0.05$$

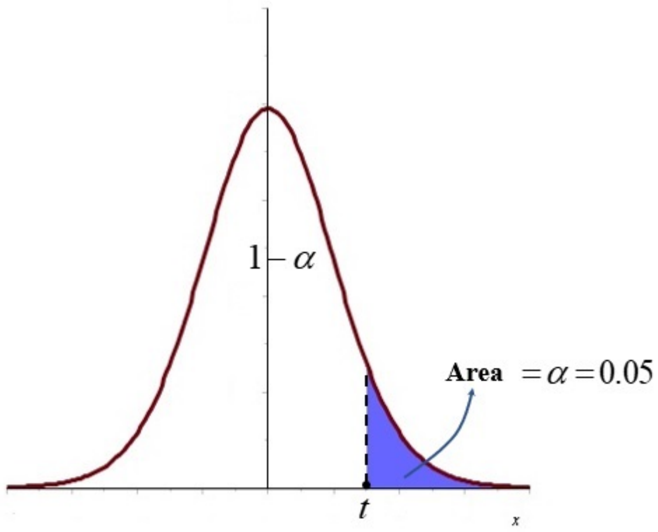

Figura 30

$1 - \alpha = 0.95$
$t_{24,0.05} = 1.71088$

4) Calcolare il percentile della t di Student tale che per $\nu = 24$

$$P[|T| > t_{24,0.05}] = 0.05$$

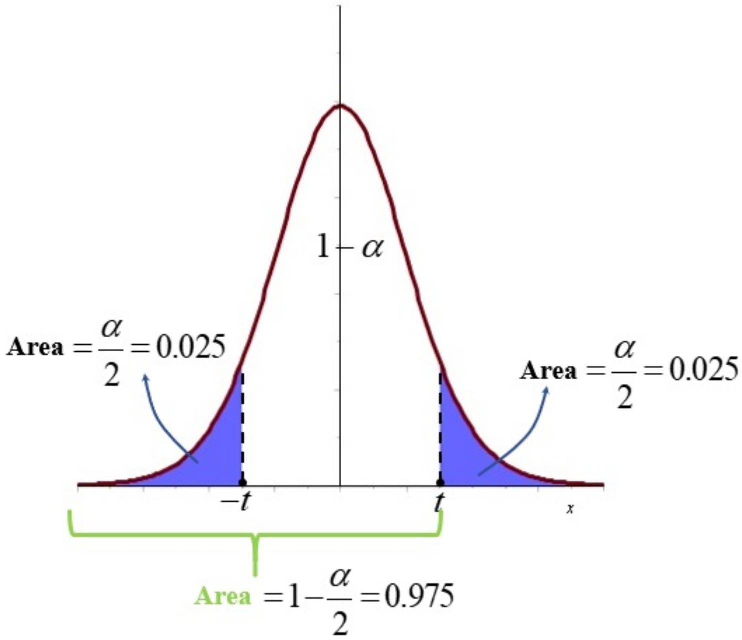

Figura 31

$P[|T| \leq t_{24,0.05}] = 0.95$
ma anche $P[T \leq t_{24,0.05}] = 1 - 0.025 = 0.975$
quindi $t_{24,0.05} = 2.06390$

OSSERVAZIONE

La MEDIANA di una variabile casuale continua è quel valore m tale che la funzione di ripartizione $F(m) = \frac{1}{2}$.

Esempi

1) $X \sim$ Unif $[a, b]$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \le x \le b$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a\,, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x < b\,, \\ 1 & x \ge b. \end{cases}$$

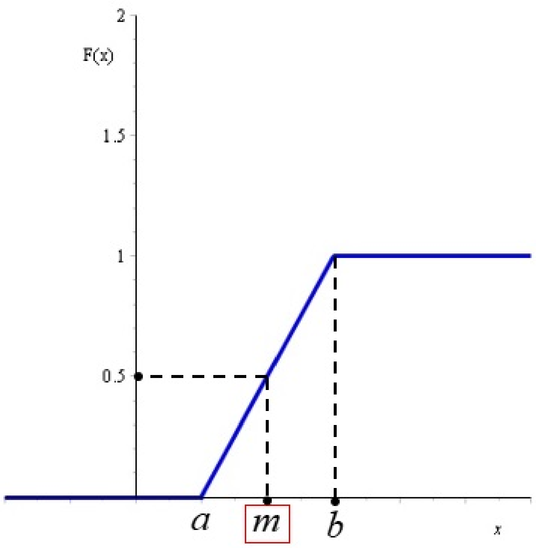

Figura 32

$F(m) = \frac{m-a}{b-a}$

$F(m) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m-a}{b-a} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \dfrac{a+b}{2}$

2) $X \sim \exp(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad (\lambda > 0)$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0\,, \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

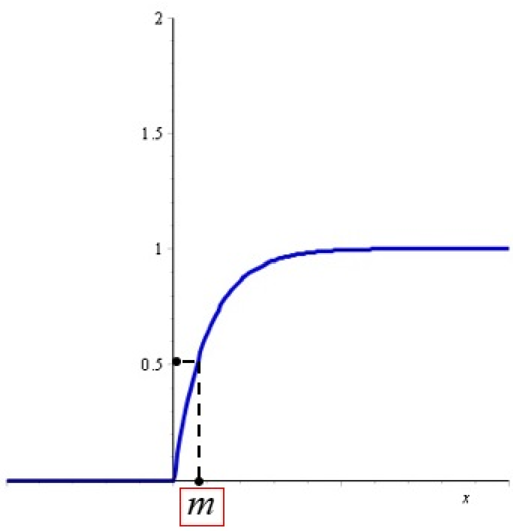

Figura 33

$F(m) = 1 - e^{-\lambda m}$

$F(m) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$